https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

Übersichtsarbeit

Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten

Empirische Befunde und Förderansätze am Beispiel des Multiplikationskonzepts

Susanne Prediger

Institut für Erforschung und Entwicklung des Mathematikunterrichts, Technische Universität Dortmund

Zusammenfassung: Mathematische Lernschwierigkeiten gehen oft mit sprachlichen Lernschwierigkeiten einher, dies gilt insbesondere für den Aufbau von konzeptuellem Verständnis. Doch was genau ist das Problem, und wie kann es bearbeitet werden? Im Artikel werden für den exemplarischen Lerngegenstand des Multiplikationskonzepts verschiedene Forschungsprojekte aufeinander bezogen, um dieses Beschreibungswissen durch gegenstandsspezifisches Erklärungswissen und Handlungswissen zu ergänzen. Das Beschreibungswissen aus statistischen Befunden wird mittels qualitativer Analysen durch Erklärungswissen ergänzt: Sprachlich schwache Lernende scheinen die für den Aufbau von konzeptuellem Verständnis notwendige Sprachhandlung 'Erklären von Bedeutung' oft zu meiden und verfügen meist nicht über die bildungssprachlichen Mittel, sie in der gebotenen präzisen und verdichteten Form zu realisieren. In Bezug auf das Multiplikationskonzept betrifft das die Fokussierung auf die multiplikativen Bündel-Strukturen. Sie wären etwa mit der Phrase „drei 4er" präzise und effizient zu fassen, diese steht den Kindern aber selten zur Verfügung. Aufbauend auf diesem Erklärungswissen ergänzen Einblicke in zwei Entwicklungsforschungsstudien gegenstandsspezifisches Handlungswissen zu einem sprachbildenden Mathematikunterricht, der die notwendigen Sprachhandlungen und Sprachmittel so fördert, dass auch Kindern mit mathematischen und sprachlichen Schwierigkeiten konzeptuelles Verständnis aufbauen und erklären können.

Schlüsselwörter: Multiplikationskonzept, Sprachkompetenz, fachbezogene Sprachförderung

Mathematical and language-related difficulties – empirical findings and instructional approaches for the example of the multiplication concept

Abstract: Mathematical learning disabilities (MLD) often coincide with language difficulties, this specifically applies to the development of conceptual understanding. But what exactly is the problem, and how can it be overcome? The article combines findings from different research projects on the exemplary topic of conceptual understanding of multiplication in order to complement the statistically generated descriptive research findings by explanative research findings and action-informing research findings. Qualitative analysis of students' thinking processes reveal explanative findings: Students with low language proficiency tend to avoid the discourse practice of 'explaining meanings' which is crucial for developing conceptual understanding, and they often lack the academic language means for articulating the explanation of meanings in precise and condensed forms. For the conceptual understanding of multiplication, this mainly concerns the focus on multiplicative structures of composite units by *unitizing*. Composite units could be captured by concise expressions such as "three sets of four", an expression however which is seldom familiar to students. Based on these explanative findings, selected insights into two design research projects reveal action-informing research findings on how to foster discourse practices and related language means in order to enable students to develop and explain conceptual knowledge.

Keywords: Multiplicative structures, language proficiency, fostering mathematics-related language

Einleitung

Sprachkompetenz hat einen engen statistischen Zusammenhang zu Mathematikleistungen. Dies belegen sowohl psychologische und sonderpädagogische Untersuchungen zu Entwicklungsstörungen schulischer Fertigkeiten (vgl. Überblick von Thomas, Schulte-Körne & Hasselhorn, 2015) als auch große Large Scale Assessments, die das schulische Regelspektrum der Heterogenität erfassen (Stanat, 2006; Prediger, Wilhelm, Büchter, Gürsoy & Benholz, 2015).

Bis vor einigen Jahren wurden die Zusammenhänge zwischen mathematischen und sprachlichen Schwierigkeiten vor allem korrelativ betrachtet (Thomas et al., 2015), in den letzten Jahren sind jedoch auch Studien zu genauen Wirkungen von sprachlichen Einschränkungen in den mathematischen Lernprozessen und zu fachspezifischen Sprachförderbedarfen und -möglichkeiten hinzugekommen. Dieser

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

Artikel gibt Einblicke in Forschungsprojekte der Dortmunder MuM-Forschungsgruppe (Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit) und zeigt, wie im Zusammenspiel mehrerer Forschungsformate eine *Forschungsfundierung für Sprachförderung im Fach* geschaffen werden kann. Der vernetzende Einblick erfolgt am exemplarischen Lerngegenstand des Multiplikationskonzepts, weil dieses für viele Themengebiete der Sekundarstufe eine zentrale Verstehensgrundlage bildet und daher gerade für Lernende mit mathematischen Schwierigkeiten (mit und ohne festgestelltem sonderpädagogischem Förderbedarf) längsschnittlich immer wieder bedeutsam ist (Cawley, Parmar, Foley, Salmon & Roy, 2001; Moser Opitz, 2007).

Forschungszugänge und Ergebnisse mehrerer Studien

Quantitative Zusammenhänge zwischen mathematischen und sprachlichen Schwierigkeiten

Studien zum statistischen Zusammenhang von mathematischen und sprachlichen Schwierigkeiten

Verschiedene empirische Studien haben einen korrelativen Zusammenhang zwischen Sprachkompetenzen und Mathematikleistungen nachgewiesen (Stanat 2006; Heinze, Herwartz-Emden, Braun & Reiss, 2011), einige auch längsschnittlich als Prädiktor für Lernzuwachs (Paetsch, Radmann, Felbrich, Lehmann & Stanat, 2016). Sprachkompetenz erweist sich dabei insbesondere als der Faktor mit stärkerem Zusammenhang zur Mathematikleistung als die Faktoren Migrationshintergrund, sozioökonomischer Status und Mehrsprachigkeit (Prediger et al., 2015). Daher wurde fachbezogene Sprachförderung von der Bildungssteuerung zur Querschnittsaufgabe aller Fächer erklärt und in vielen Lehrplänen verankert.

Hinweise auf enge Zusammenhänge gibt es auch für Lernende mit mathematischen Lernschwierigkeiten (mit und ohne festgestelltem sonderpädagogischem Förderbedarf), auch wenn Sprachkompetenz in diesen Untersuchungen oft nur als Lesekompetenz gefasst wurde (Überblick in Thomas et al., 2015 und Prediger, Erath, Moser Opitz, 2019). Mann Koepke und Miller (2013) zufolge haben 17% bis 66% der Lernenden mit mathematischen Lernschwierigkeiten auch erhebliche Leseschwierigkeiten.

Für Lernende mit mathematischen Schwierigkeiten im Regelspektrum scheinen sich die sprachlichen Schwierigkeiten weniger auf die Rechenfähigkeiten als vor allem auf den Aufbau von konzeptuellem Verständnis auszuwirken, dies zeigen Prediger et al. (2015) für Klasse 10 und Heinze et al. (2011) für die Grundschule. Ob dies auch für Lernende mit sonderpädagogischem Förderbedarf gilt, muss noch weiter untersucht werden.

Sprachliche Disparitäten beim Multiplikationskonzept – Ergebnisse einer Dortmunder Leistungsstudie

Erste Hinweise auf die Bedeutung der Sprachkompetenz auch beim Multiplikationskonzept gibt eine große Leistungsstudie zu arithmetischen Basiskompetenzen in Klasse 7: Im Rahmen des Projekts MuM-Implementation wurde mit n = 1493 Siebtklässlerinnen und Siebtklässlern im gesamten Leistungsspektrum der standardisierte Test BasisMath G6/7 durchgeführt, der die arithmetischen Basiskompetenzen der Jahrgänge 4–6 testet, darunter auch das Multiplikationskonzept. Zusätzlich wurde die deutsche Sprachkompetenz mit einem C-Test erhoben (einem Lückentest mit drei Texten, der sich zur zeitökonomischen und standardisierten Erhebung ohne Reduktion auf einzelne sprachliche Teilfertigkeiten bewährt hat und auch Aspekte von Lesekompetenz umfasst). Als *sprachlich schwach* wurde gemäß eines in großer Stichprobe per Median-split gesetzten Cut-Offs (Prediger & Wessel, 2018) eingestuft, wer bis zu 41 Lücken richtig bearbeitet hat, bei 42–60 richtig bearbeiteten Lücken als sprachlich stark (vgl. Info-Box zur Forschungsmethode am Ende des Artikels).

Der Vergleich der Ergebnisse des BasisMath G6/7 zwischen sprachlich Schwachen und Starken zeigt interessante differentielle Ergebnisse: Während die sprachlich starken Lernenden insgesamt durchschnittlich 42,2 Punkte erreichten, erreichten die sprachlich Schwachen durchschnittlich nur 61% der Punkte der Starken, also 26,8 Punkte. Einblicke in Hintergründe ermöglicht die folgende multiplikative Textaufgabe:

> „Ein ausgewachsenes Gorilla-Männchen frisst in einer Woche etwa 210 kg Früchte und Pflanzen.
> a) Wie viele kg sind das etwa an einem Tag?
> b) Wie viele kg sind das etwa in einem Monat? Suche dir einen Monat aus."

In dieser Textaufgabe Gorilla erreichten die sprachlich Schwachen dagegen im Mittel nur 44% der Punkte der Starken. Die Textaufgabe gehört zur Skala des Multiplikationskonzepts, bei der die Schwachen insgesamt 53% der Punkte der sprachlich Starken erreichten, also deutlich weniger als in der Skala zu Rechenfertigkeiten und der Skala zum Stellenwertverständnis. Diese Ergebnisse bestätigen andere Untersuchungen in zwei zentralen Aspekten:

- Sprachliche Disparitäten in der Gesamt-Testleistung drücken sich durch signifikante Unterschiede von sprachlich Starken und Schwachen aus.
- Sprachliche Disparitäten beziehen sich vor allem auf konzeptuelles Verständnis, während Rechenfertigkei-

 © 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

ten durchaus ausgebildet werden können. Dabei sind das Stellenwertverständnis und Additions-/Subtraktionskonzepte altersgemäß in Klasse 7 nicht mehr ausschlaggebend, jedoch ist das (eigentlich in Klasse 2 zu entwickelnde) Multiplikationskonzept immer noch eine Herausforderung für die sprachlich Schwachen.

Der gleiche Test wurde bislang 11 Lernenden mit Förderschwerpunkt Lernen vorgelegt, die ein mittleres C-Test Ergebnis von 22,3 Punkten erreichten (alle unterhalb des Cut-Offs; ein zwölfter Schüler mit 43 Punkten und nahezu voller Punktzahl in allen Items des BasisMathG wurde wege fragwürdiger Zuordnung zum Förderbedarf aus der Wertung genommen). Die 11 Lernenden erreichten im Mittel 11,3 Punkte im BasisMath G, das sind 27% des Scores der sprachlich Starken. In der Skala zum Multiplikationskonzept waren es 22%, im Item Gorilla 19%. Auch wenn die Stichprobe von n = 11 noch keinerlei verallgemeinerbare Aussagen erlaubt, zeigt sich hier eine ähnliche Tendenz wie für die sprachlich Schwachen, dass das Multiplikationskonzept schwächer als andere Basiskompetenzen ausgebildet ist. Um diese differentiellen Befunde zu erklären, sind tiefere Problemanalyen erforderlich.

Qualitative Problemanalysen in Denkprozessen zum Multiplikationskonzept

Theoretischer Hintergrund zum Multiplikationskonzept

Im Gegensatz zu den Multiplikations-Rechenfertigkeiten (auswendig gelerntes Einmaleins und schriftliche Rechenverfahren) zielt das konzeptuelle Verständnis des Multiplikations*konzepts* auf die Bedeutung der Multiplikation und ihrer Anwendung in Sachsituationen. Seine Verfügbarkeit wird in der Regel durch den Auftrag abgeprüft, symbolisch dargestellte Multiplikationen in graphische oder verbale Darstellungen zu übersetzen und zurück, d.h. multiplikative Strukturen in Bilder und Textaufgaben hineinzusehen (Abb. 1).

Während in der deutschsprachigen Didaktik meist die räumlich-simultane Grundvorstellung (graphisch dargestellt im Punktefeld) und die zeitlich sukzessive Grundvorstellung (graphisch dargestellt am Zahlenstrahl) als zwei zentrale Bedeutungen unterschieden werden, betont der amerikanische Raum eher das Zählen in Bündeln: die zentrale Denkhandlung beim Nutzen multiplikativer Strukturen ist das *Unitizing* (Lamon, 1996), d.h. das Bilden und Zählen neuer *Composite Units* (Steffe, 1994). Der zweite Faktor zählt, wie groß die Bündel sind, der erste Faktor beschreibt, wie viele Bündel vorliegen. Diese Deutung muss in alle graphischen Darstellungen und alle Kontextsituationen hineingesehen werden, bildet also das Bindeglied zwischen den verschiedenen anderen Grundvorstellungen und ist relevant für alle graphischen Darstellungen (vgl. Abb. 1).

Dass allerdings die Denkhandlung des Bündelns für Lernende eine kognitive Herausforderung ist, wurde vielfach empirisch nachgewiesen (z.B. Lamon, 1996; Steffe, 1994; Cawley et al., 2001; Moser Opitz, 2007; Ehlert, Fritz, Arndt & Leutner, 2013).

Einblick in qualitative Problemanalysen: Wie hängt das Multiplikationskonzept mit Sprache zusammen?

Dass die Verfügbarkeit des Multiplikationskonzepts mit der sprachlichen Elaboriertheit der Erläuterungen der Kinder einhergeht, zeigten Bailey, Blackstock-Bernstein und Heritage (2015) in ihrer korrelativen Analyse von über 200 Erläuterungen, ohne allerdings den inhaltlichen Zusammenhang herzustellen.

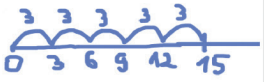
Symbolische Darstellung	$5 \cdot 3 = 15$	**Formalbezogene Versprachlichung**	• 1. Faktor 5 multipliziert mit 2. Faktor 3 ergibt das Produkt 15
Graphische Darstellungen Punktefeld		**Bedeutungsbezogene Versprachlichung**	• fünf 3er-Reihen sind 15 • fünf Zeilen mit je 3 Punkten sind 15
Zahlenstrahl			• fünf 3er-Schritte
Würfelbilder			• fünf 3er Würfel
Struktureller Kern: Zählen in Bündeln in jeder der Darstellungen	3, 6, 9, 12, 15 sind fünf 3er (besser nicht 3+3+3+3+3)	**Alltagssprachliche Versprachlichung**	• Wir sind 5 Schritte gerannt, jeder war 3 m lang, also $5 \cdot 3 = 15$. • 5 Gruppen mit immer 3 Kindern

Abbildung 1. Multiplikationskonzept in verschiedenen Darstellungen.

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

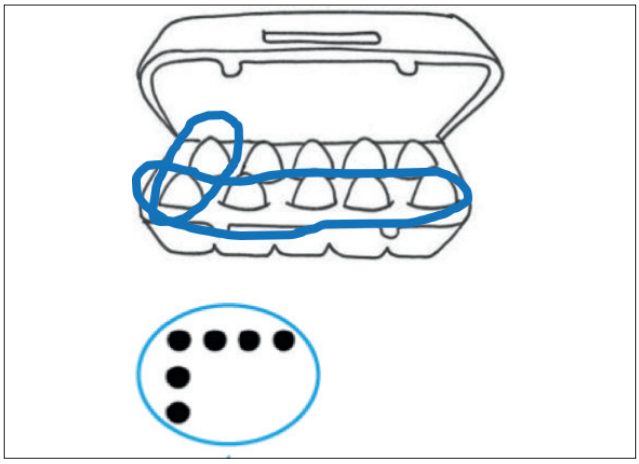


Abbildung 2. Multiplikative Strukturen in Bilder hineinsehen.

Denkprozessanalysen bei Lernenden mit mathematischen Lernschwierigkeiten aus verschiedenen Jahrgängen wurden in der Dortmunder MuM-Forschungsgruppe durchgeführt, um qualitativ und videobasiert zu rekonstruieren, inwiefern eine eingeschränkte Sprachkompetenz den beschriebenen Umgang mit dem Multiplikationskonzept zusätzlich erschwert. Qualitativ analysiert wurden dazu die individuellen Sprachproduktionen von Kindern und Jugendlichen in videographierten Denkprozessen zum Multiplikationskonzept (vgl. Info-Box zur Forschungsmethode am Ende des Textes). Dabei wurden insbesondere die aktivierten und vermiedenen Sprachhandlungen rekonstruiert und die dabei genutzten und ggf. noch notwendigen Sprachmittel identifiziert.

Sieht man von Neuzugewanderten ab (die ggf. die Mathematik beherrschen, aber noch nicht die Unterrichtssprache Deutsch), so zeigen sich bei den in Deutschland aufgewachsenen ein- und mehrsprachigen mit sprachlichen Schwierigkeiten (operationalisiert durch C-Test) weniger sprachliche *Fehler* als vielmehr charakteristische *Auslassungen:*

Was sie sagen, ist meist lexikalisch und grammatisch richtig, aber bestimmte Sprachhandlungen und Sprachmittel werden systematisch nicht genutzt, obwohl sie für die relevanten Denkhandlungen bedeutsam wären. Im Zuge der über mehrere Projekte und Jahrgänge verteilten Denkprozessanalysen wiederholten sich von Klasse 3 bis 10 immer wieder folgende Beobachtungen (Prediger, 2019; Strucksberg & Prediger, 2018; Totaro, 2018; Götze, im Druck):

- Zwar können viele Lernende erläutern, wie sie Multiplikationen berechnen, doch nur wenige können erklären, was sie bedeuten. Der nicht vollzogene Aufbau konzeptuellen Verständnisses ist oft auch durch die fehlende Explizierung oder die mangelnde Teilhabe an der *Sprachhandlung des Erklärens von Bedeutungen* mit bedingt (Prediger et al., 2019).
- In vielen der falschen Interpretationen werden nur die Faktoren gedeutet, nicht aber die multiplikative Beziehung zwischen den Faktoren in entsprechenden Sprachhandlungen adressiert, zum Beispiel
  - In Tanyas (3. Klasse) Rechengeschichte zu $6 \cdot 5$: „Ich habe Geburtstag und backe 5 Muffins für meine Familie und 6 für meinen Freund. F: Wie viele Muffins muss ich backen. R: $6 \cdot 5 = 30$. A: ich muss 30 Muffins backen." (Tobaro 2018, S. 9). Die Fokussierung nur auf die Zahlen 6 und 5 und die Auslassung der Erklärung des Operationssymbols führt dazu, dass sie die Operation falsch konzeptualisiert.
  - Ahmed (9. Klasse) erklärt die Volumenformel für Kegel: „Ich verstehe die Formel, h ist die Höhe und G ist die Grundfläche und dann 1/3." – Doch warum werden die Größen multipliziert? Eine Begründung für die Wahl der Operation äußern sich Ahmed und viele andere Probanden nicht.
- In graphischen Darstellungen werden oft nur die Ränder thematisiert, nicht die Bündel; die einzige sprachliche Verknüpfung zwischen beiden Faktoren ist ein „und", z. B.
  - Tanya (3. Klasse) erklärt den Ausdruck „zwei mal fünf Eier im Karton" so: „Hier des als erstes rechnen [*kreist zwei übereinander liegende Eier ein, vgl. Abb. 2*], also das sind zwei – mal 1, 2, 3, 4, 5 [*zeigt auf die fünf Eier der ersten Reihe*]. Zwei mal fünf." (Tobaro, 2018, S. 29). Tanya hat zwar das Bild richtig zugeordnet, jedoch die multiplikative Struktur nicht expliziert. Die zwei Fünfer-Bündel werden nicht identifiziert oder sprachlich adressiert.
  - Belmin (6. Klasse) begründet, warum aus seiner Sicht das Haken-Bild aus Abb. 2 zu $3 \cdot 4 = 12$ passt: „Das passt, weil [...] drei, die nach oben gehen und vier, die also seitlich gehen nach rechts." (Video N4-BG aus Mathe sicher können). Weil Belmin nur die Ränder thematisiert, fällt ihm nicht auf, dass der Haken keine 12 Punkte enthält. Eine multiplikative Struktur wird nicht erklärt.
- Wenn die Lernenden den vermeintlich aus dem Alltag bekannten Ausdruck „Mal" in Sachkontexten nutzen, dann häufig nur partiell tragfähig, was darauf hindeutet, dass die vermeintliche Vertrautheit des Wortes das Fehlen einer mathematisch tragfähigen Interpretation verdeckt, z. B.
  - Serpil (8. Klasse): „Ich gehe fünf Mal und bringe 3 Äpfel, 5 mal 3." Dies korrigiert er nur mühsam unter Anleitung der Lehrkraft in „Ich gehe fünf Mal und bringe jedes Mal 3 Äpfel, also 3, 6, 9, 12, 15, sind 5 mal 3." (Beobachtung in Mathe sicher können).
- Selbst bei denjenigen, die die Grundvorstellung des Zählens in Bündeln erworben haben, wird die Denkhandlung des Bündelns oft sehr umständlich ausgedrückt:
  - Karlos (5. Klasse): „Es sind 5 Gruppen von Kindern. Und in den Gruppen, also in allen Gruppen, da sind ja

 © 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

6 Kinder, also in der Gruppe. Dann sind noch 2 Kinder, macht 7 Gruppen." (Video N4-KJ aus Mathe sicher können). Auch wenn Karlos die multiplikative Bündel-Struktur versprachlicht, ist dies ein so langer Gedanke, dass er damit nicht weiter operieren kann. Gerade den Lernenden mit beschränktem Arbeitsgedächtnis fehlt so ein prägnante Möglichkeit, die Bündelung mental und sprachlich zu greifen.

Die Beispiele aus ganz unterschiedlichen Jahrgängen zeigen, dass das Multiplikationskonzept durch die gesamte Sekundarstufe I eine zentrale Verstehensgrundlage für viele Themen bildet, Tabelle 1 stellt diese und weitere Beispiele zusammen, in denen das Multiplikationskonzept einen Kern bildet. Die Sprachhandlung des Erklärens von Bedeutungen mit den dafür benötigten Sprachmitteln sind jeweils aufgeführt.

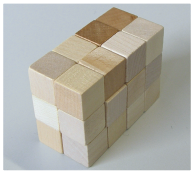
Insgesamt lässt sich bilanzieren, dass sich sprachliche Schwierigkeiten vieler Lernende mit mathematischen Schwierigkeiten oft in Auslassungen relevanter Sprachhandlungen und Sprachmittel äußern:

Sprachhandlungen: Unterrichtsbeobachtungsstudien zeigen, dass mathematisch schwache Lernende von Lehrkräften nur selten zu der verstehenssichernden Sprachhandlung Erklären von Bedeutungen aufgefordert werden, statt dessen verharren sie meistens im Erläutern von Rechenwegen (sprachdidaktischer Fokus auf kalkülbezogenen Sprachhandlungen, vgl. Prediger et al., 2019).

Sprachmittel: Wenn die Lernenden doch zum Erklären aufgefordert werden, adressieren in sie ihren Erklärungen der Multiplikation die relevante Relation oft nicht adäquat und haben insbesondere für das Zählen in Bündeln keine griffigen Sprachmittel zur Verfügung (fehlende multiplikative Sprachmittel). Der Rückzug auf die verbreitete Konjunktion „und" ist ein guter Indikator für den fehlenden Fokus auf die Operation selbst. Auch die vermeintliche Vertrautheit mit dem alltäglich vorkommenden Wort *Mal* kann das Fehlen der Sprachmittel verdecken, die für die eigentlich auszudrückende Denkhandlung, das Bündeln gebraucht werden.

Die Nichtbewältigung der hier identifizierten sprachlichen Anforderungen bringt nicht nur Schwierigkeiten mit der *kommunikativen Funktion von Sprache* mit sich (d.h. beim Sprechen über mathematisches Wissen), sondern vor allem in der *kognitiven Funktion von Sprache* (vgl. Morek & Heller, 2012 zu dieser wichtigen Unterscheidung): Eine gut ausgebaute Sprachkompetenz kann ein kraftvolles Denkwerkzeug für neue Denkhandlungen sein, doch müssen dazu die passenden Sprachmittel zur Verfügung stehen, die die relevanten mathematischen Strukturen

Tabelle 1. Beispiele von Themen der Sek. 1 mit Multiplikationskonzept als notwendiger Versehengrundlage

Themengebiet	Beispiel für formalbezogenen Ausdruck	Beispiel für Erklären der Bedeutung
Flächeninhalt von Rechtecken (Kl. 5)	Fläche gleich Länge mal Breite	Es sind zwei Reihen, jede Reihe ist 4 Quadrate lang, also zwei 4er-Reihen. 
Volumen von Quadern (Kl. 6)	Volumen gleich Höhe mal Breite mal Länge	In der Grundschicht sind zwei Reihen, jede Reihe ist 4 Kubikzentimeter-Würfel lang, also zwei 4er-Reihen. Es sind 3 solche 8er Schichten, also 3 · 4 · 2.
Proportionales Denken (Kl. 7)	pro Portion 3 € bei 10 Portionen 10 · 3 €	Für jede Portion nehme ich einen 3 Euro-Stapel hinzu, bei 10 Portionen sind es zehn 3er-Stapel.
Prozentrechnung (Kl. 7)	10 % sind 3 MB, 40 % sind 12 MB	10 %, 20 %, 30 % 40 %, also sind 40 % vier 10er.  3, 6, 9, 12 also sind 12 MB vier 3er.
Terme & lineare Funktionen (Kl. 8)	Konstante Steigung f(x) = 40 · x	Pro Jahr x steigt der Preis um 40 €, also ein 40er, zwei 40er, drei 40er und so weiter, also f(x) = 40 · x
Potenzen (Kl. 9)	$a^n = a \cdot a \cdot .... \cdot a$ $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$	Beim Potenzieren bildet man immer größere Bündel: 4^2 sind vier 4er-Bündel, und 4^3 sind vier von den vier 4er Bündeln.
Ähnlichkeit (Kl. 9)	|AB|' = 5 · |AB| Streckfaktor	Jede Seite wird fünf mal so lang, denn aus jedem mm werden 5 mm

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

(hier das *Unitizing*) prägnant fassen. Ist das sprachliche Denkwerkzeug dagegen nicht verfügbar, werden auch mentale Prozesse erschwert, wie oben bei Karlos.

Aus diesen und vielen weiteren Analysen wurde daher herausgearbeitet, dass ein Sprachmittel zum ökonomischen und prägnanten Beschreiben des *Unitizing* erforderlich ist. Bewährt hat sich in ersten Lernprozessstudien der Satzbaustein *drei 4er* (Götze, im Druck), der die unterschiedliche Rolle beider Faktoren verdeutlicht und das *Unitizing* sprachlich unterstützt:

- Tanya könnte mit *zwei 5ern* ihre Eierkartons beschreiben.
- Belmin müsste ausdrücken, dass man zwar drei und vier, aber nicht *drei 4er* sieht in dem Haken-Bild.
- Karlos könnte mit *fünf 6er*-Gruppen seinen Gedanken vielleicht so kompakt formulieren, dass genügend Kapazität für den Rest 2 bleibt und er ihn nicht zu den Gruppen hinzuaddiert.
- In jedem Beispiel aus Tabelle 1 lässt sich die Bedeutung durch den Satzbaustein erklären.

Mit Einblicken in verschiedene fach- und sprachintegrierte Lehr-Lern-Arrangements wird im nächsten Abschnitt gezeigt, wie dieser multiplikative Satzbaustein der *drei 4er-Gruppen/Schritte* das Erfassen der multiplikativen Bündel-Struktur erheblich unterstützen kann.

Fach- und sprachintegrierte Förderansätze zum Multiplikationskonzept – Einblicke in zwei Entwicklungsforschungsstudien

Die theoretischen und quantitativen Problemanalysen zeigen, dass die Denkhandlung des *Unitizing* der Grundvorstellung der Multiplikation vom Zählen in Bündeln zugrunde liegt und geben erste Hinweise, dass diese Denkhandlung sprachlich durch den Satzbaustein *drei 4er* unterstützt werden könnte, wo immer Konzeptaufbau durch Darstellungsvernetzung angestrebt wird.

Durch Entwicklungsforschungsstudien wurde dieser zunächst in praktischen Erfahrungen entwickelte Ansatz weiter fundiert, um qualitative Belege zu finden, dass dieser Satzbaustein tatsächlich ein Denkwerkzeug bieten kann, mit dem Lernende die relevanten multiplikativen Strukturen in (graphisch oder textlich gegebene) Situationen hineinsehen lernen.

Dies wurde in eine Entwicklungsforschungsstudie zur inklusiven Förderung zur Prozentrechnung in Klasse 7 (Strucksberg & Prediger, 2018) und in sprach- und fachintegrierte Förderungen zum Multiplikationskonzept in Klasse 3 (Totaro, 2018) bzw. Divisionskonzept (Götze, im Druck) eingebettet, zum Multiplikationskonzept sollen hier Ausschnitte vorgestellt werden. Da sich sprach- und fachintegrierte Förderungen nicht auf ein einzelnes Sprachmittel allein konzentrieren können, werden zunächst die umfassenderen Designprinzipien vorgestellt, nach denen die Förderungen gestaltet sind.

Theoretischer Hintergrund: Designprinzipien für fach- und sprachintegrierte Förderung

Beiden Fördereinheiten liegen folgende vier Designprinzipien für Sprachförderung im Fach Mathematik zugrunde: Verstehensorientierung, Darstellungsvernetzung, Kommunikationsförderung und Scaffolding, die im Folgenden erläutert werden:

Verstehensorientierung als zentrales Designprinzip im Umgang mit mathematischen Schwierigkeiten

Mathematische Schwierigkeiten können (in seltenen Fällen) durch physiologische Einschränkungen bedingt sein (Thomas et al., 2015), meistens jedoch sind sie auf Lücken im konzeptuellen Verständnis vorangehender Lerninhalte (d.h. den Verstehensgrundlagen) zurück zu führen (Moser Opitz, 2007). Daher sind die oft auf Drill and Practice ausgerichteten Förderprogramme bei Lernschwierigkeiten hochproblematisch und wenig hilfreich für die langfristige Anschlussfähigkeit (ibid.; Carpenter & Lehrer, 1999).

In Bezug auf sprachliche Schwierigkeiten kommt hinzu, dass sich Beschränkungen in der Sprachkompetenz vor allem auf den Aufbau von konzeptuellem Verständnis negativ auswirken (wie in den quantitativen Studien gezeigt), daher sollten fach- und sprachintegrierte Förderungen auf die sprachliche Unterstützung des Aufbaus von konzeptuellem Verständnis fokussieren (Prediger, 2019).

Konkret umgesetzt werden kann Verstehensorientierung durch die Strukturierung der Lerngelegenheiten in einem Lernpfad, der zunächst am Handeln und intuitiver Vorerfahrung ansetzt, dadurch Konzepte aufbaut und dann die entsprechenden Rechenfertigkeiten (sogenannter Kalkül) per fortschreitender Schematisierung an das konzeptuelles Verständnis anknüpft (Gravemeijer, 1999). Diese Prinzipien sind auch ohne Berücksichtigung der Sprachkompetenz von zentraler Bedeutung und wurden in folgende Stufen eines konzeptuellen Lernpfads übersetzt:

1. Stufe: Aktivieren von intuitiven Vorerfahrungen in mathematisch reichhaltigen Situationen
2. Stufe: Erarbeiten, Sichern und Einüben des konzeptuellen Verständnisses, d.h. der Bedeutungen der mathematischen Konzepte (in einem vertrauten Kontext)
3. Stufe: Erarbeiten, Sichern und Einüben der Rechenverfahren und formal-sprachlichen Fassungen (über mehreren Kontexte oder ohne Kontext)
4. Stufe: Ausweiten der Anwendungen in komplexere Situationen (kontextuell komplexerer und dann auch mathematisch-strukturell komplexerer Kontexte)

 © 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

Darstellungsvernetzung für Verstehensaufbau und Sprachförderung

Ein weiteres zentrales Designprinzip zur Realisierung von Verstehensorientierung ist das regelmäßige und systematische Vernetzen von gegenständlichen, graphischen, symbolischen und verbalen Darstellungen, das bereits seit 50 Jahren für die Mathematikdidaktik entdeckt und immer wieder als lernwirksam herausgearbeitet wurde (Bruner, 1966). Auch in Bezug auf den Umgang mit mathematischen Schwierigkeiten wurde es immer wieder betont (Moser Opitz, 2007).

Gegenüber den frühen Versionen, in denen von Darstellungs*wechsel* gesprochen wurde, betonen wir heute die *Vernetzung* (Prediger & Wessel, 2018; Prediger, 2019), weil es nicht ausreicht, Darstellungen nebeneinander zu stellen, sondern gerade schwächere Lernende explizite Unterstützung dabei brauchen, die Darstellungen zu vernetzen und zu verstehen, wie sie zusammenpassen.

In Bezug auf die Sprachförderung wurde das Prinzip des Darstellungsvernetzung dahingehend ausdifferenziert, dass nicht nur enaktive, ikonische und symbolische Darstellungen, sondern insbesondere auch verbale Darstellungen fokussiert werden und dabei die Unterschiede zwischen Alltagssprache, Bildungssprache und Fachsprache berücksichtigt und systematisch adressiert werden (vgl. Abb. 3). Was Leisen (2005) für eine sprachsensible Physikdidaktik in Deutschland als Grundprinzip bekannt gemacht hat, hat sich auch für eine sprachförderliche Mathematikdidaktik empirisch nachweislich bewährt (Prediger & Wessel, 2018).

Kommunikationsförderung für diskursiv reichhaltige Sprachhandlungen

Das Prinzip der Kommunikationsförderung geht sprachdidaktisch auf die Output-Hypothese zurück: Sprache lernt man durch reichhaltigen Input, aber vor allem auch dadurch, immer wieder zu reichhaltigem Output angeregt zu werden, und zwar sowohl mündlich als auch schriftlich.

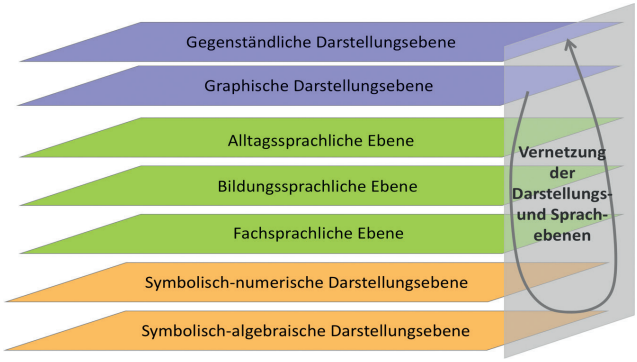


Abbildung 3. Vernetzung der Darstellungs- und Sprachebenen als Prinzip der Vorstellungs- und Sprachförderung.

Empirische Studien zu Gelingensbedingungen von Kommunikationsförderung für fachbezogene Lernwirksamkeit deuten allerdings an, dass nicht allein die Quantität der Sprachproduktion der Lernenden relevant ist, sondern die diskursive Qualität ihrer Sprachhandlungen (Moschkovich, 2015): Häufiges Nennen oder Erzählen und auch Erläutern von Rechenwegen scheint weniger verstehensförderlich zu sein als die Sprachhandlungen des Erklärens von Bedeutungen und Argumentierens (Prediger, 2019). Die Relevanz der bedeutungsbezogenen Sprachhandlungen wurde auch bereits in Bezug auf die Schwierigkeiten im Abschnitt zu den Leistungsstudien.

Makro-Scaffolding zum sukzessiven Aufbau der gegenstandsspezifisch relevanten Sprachmittel entlang des konzeptuellen Lernpfads

Diskursiv reichhaltige Sprachhandlungen sollten entlang des konzeptuellen Lernpfads nicht nur immer wieder eingefordert und graphisch unterstützt werden, sondern auch ausgebaut durch den sukzessiven Aufbau der relevanten Sprachmittel entlang des Kontinuums von eigensprachlichen Ressourcen über die bedeutungsbezogenen hin zu den formalbezogenen Sprachmitteln. Dieses Prinzip der Sequenzierung im sprachlichen Lernpfad nennt Gibbons (2002) Makro-Scaffolding. Das für den mathematischen Verstehensaufbau notwendige Makro-Scaffolding wurde durch Pöhler & Prediger (2017) in einem dualen Lernpfad strukturiert (vgl. Abb. 4).

Empirische Evidenzen für Wirksamkeit der Designprinzipien

Die Lernwirksamkeit dieser Designprinzipien wurde für zwei Unterrichtseinheiten zum Brücheverständnis (Prediger & Wessel, 2018) und zum Prozentverständnis (Pöhler, 2018) empirisch nachgewiesen: für beide Unterrichtseinheiten zeigten quasiexperimentelle Interventionsstudien im Prä-Post-Kontrollgruppendesign, dass Lernenden mit mathematischen Schwierigkeiten, die mit einer nach diesen Prinzipien gestalteten Unterrichtseinheit lernten, signifikant größere Lernzuwächse hatten als mit herkömmlichem, nicht sprachförderlich gestaltetem Unterricht.

Daher werden in den folgenden Abschnitten vorzustellenden Entwicklungsforschungsstudien die vier Prinzipien auf das Multiplikationskonzept übertragen. Auch wenn noch keine quantitativen Ergebnisse einer entsprechenden Interventionsstudie vorliegen, geben die qualitativen Einblicke in die initiierten Lernprozesse erste qualitative Hinweise, dass eine solche Übertragung erfolgsversprechend zu sein scheint.

Einblicke in eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung des Multiplikationskonzepts in Klasse 3

Der Förderbaustein N4 des Mathe-sicher-Können-Materials (Akinwunmi, Deutscher & Selter, 2014) folgt den skizzierten

© 2019 Hogrefe

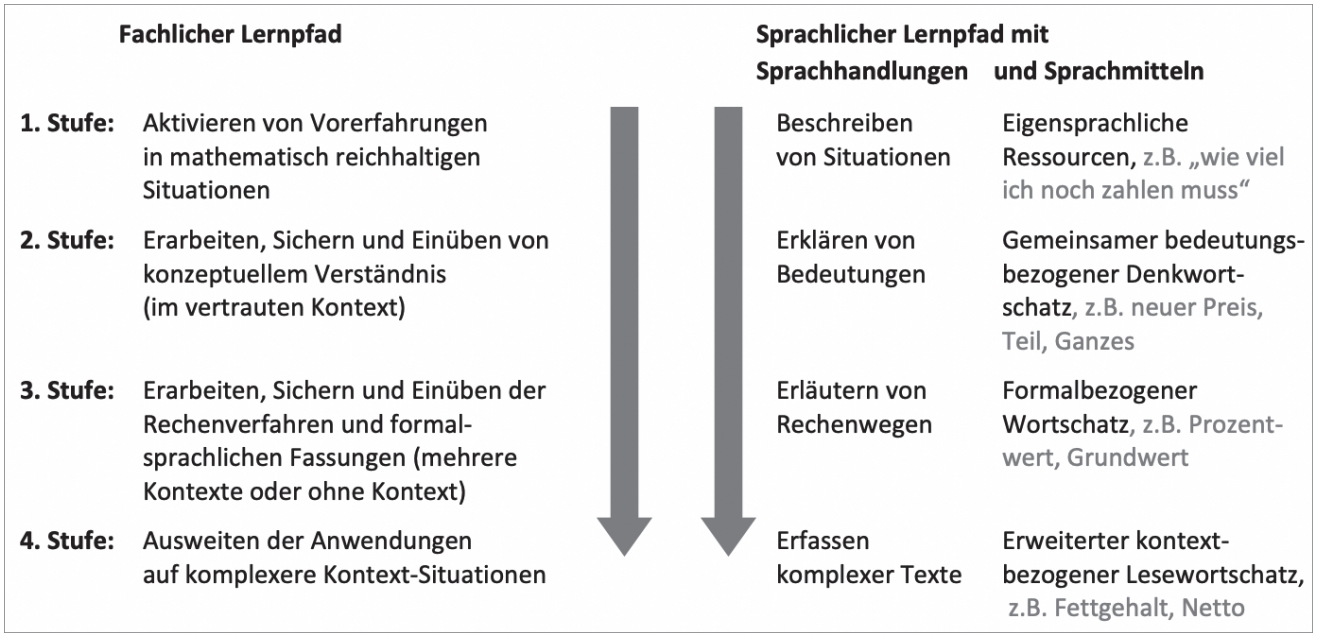


Abbildung 4. Verknüpfte duale Lernpfade mit vier Stufen (nach Gravemeijer, 1999 und Pöhler & Prediger, 2017).

Design-Prinzipien Verstehensorientierung, Darstellungsvernetzung und Kommunikationsförderung: Gearbeitet wird am Aufbau des Verständnisses des Multiplikationskonzepts, bevor Rechenfertigkeiten gesichert und automatisiert werden. Dazu werden graphische, symbolische und verbale Darstellungen (vgl. Abb. 1) systematisch verknüpft. In der publizierten Fassung wurde allerdings noch wenig zum systematischen Sprachaufbau mittels Makro-Scaffolding angeregt. Dies wurde entlang des in Abbildung 4 skizzierten dualen Lernpfads im Rahmen einer Masterarbeit (Totaro, 2018) ergänzt und erprobt.

Denn obwohl die Denkhandlung des Zählens in Bündeln durch die Würfel-Darstellung bereits im ursprünglichen Material gezielt angeregt wurde, zeigt das Schriftprodukt von Tanya in Abbildung 5, dass die Würfel-Darstellung alleine nicht zwangsläufig in multiplikativer Struktur erfasst werden muss. Tanya verbindet die beiden Faktoren trotz graphisch bereits vorgegebener Bündel-Struktur weiterhin nur mit „und“. Diese Beobachtung bestätigen Befunde anderer Analysen, dass auch in graphischen Darstellungen die Strukturen und Relationen erst hineingesehen werden müssen. Eine explizit darauf gerichtete Aufmerksamkeitsfokussierung kann und sollte durch entsprechende Versprachlichungen unterstützt werden (Götze, im Druck).

Im Rahmen der sprachlich angereicherten Förderung wurden daher vielfältige Verbalisierungen der multiplikativen Bündel-Struktur angeboten, wie sie auch in vielen anderen Schulbüchern vorkommen (Totaro 2018, S. 52):

Es sind 3 Packungen. *In jeder* Packung sind 6 Flaschen.
Es sind 3 Packungen. *Je* Packung sind es 6 Flaschen.
Es sind 3 Packungen. *Pro* Packung sind es 6 Flaschen.
Es sind 3 Packungen *mit jeweils* 6 Flaschen.
Es sind 3 Packungen *mit je* 6 Flaschen.
Finde nun verschiedene Beschreibungen zum nächsten Bild.

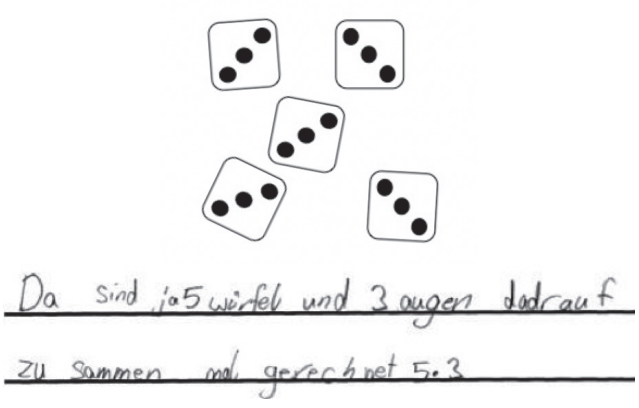


Abbildung 5. Tanyas Beschreibung des Würfelbildes zu Beginn der Förderung – „und“ als einzige Verknüpfung (Totaro 2018, S. 51).

Allerdings zeigten sich bei den Lernenden erhebliche Schwierigkeiten, diese Sprachmittel in ihre Sprache sinnvoll zu integrieren: Die Sprachmittel wurden von den Kindern nicht in den aktiven Sprachgebrauch übernommen, selbst in der explizit angeleiteten Übung durch enge Kopie der Vorgaben (vgl. Abb. 7) weisen sie aussagekräftige Fehler auf, wie folgende Transkriptsequenzen zeigen:

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

26 Daria	Ich sehe 3 Würfel. In jedem sind es je 2 Punkte.
28 Daria	Ich sehe 3 Würfel. In jedem sind es pro 2 Punkte.
32 Lea	Es sind drei Würfel pro 2 Punkte. Ne. In jedem pro 2 Punkte.

(F7a, 02:42–3:35, Totaro 2018, S. 52).

Auch diese Beobachtung stützt demnach die Einführung des komprimierteren und grammatisch einfacheren Sprachmittels *drei 6er*. In den Designexperimenten von Totaro (2018) wurde es im Gegensatz zu den Präpositionen und Quantoren von den Lernenden in den aktiven Sprachgebrauch übernommen und entfaltete die erhoffte Wirkung als Denkwerkzeug für die Denkhandlung des Bündelns.

Das folgende Transkript aus Totaro (2018, S. 31, FS4, ab 36:28) zeigt, wie die Lernenden erst sukzessive das zuvor für Würfelbilder eingeführte Sprachmittel *fünf Fünfer* auch für kontextbezogene Rechteckdarstellungen der Schokoladentafel (in Abb. 6) mit Bedeutung füllen.

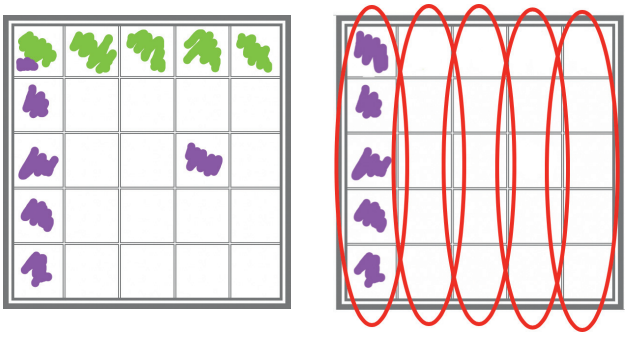


Abbildung 6. Wo sind die fünf Fünfer? (Links: Rayans und Tanyas erstes Bild. Rechts: Rekonstruiertes zweites Bild, in dem ein 5er, zwei 5er, drei 5er, vier 5er, fünf 5er markiert werden).

1 Lehrerin	Welche Aufgabe habt ihr denn bei der Schokolade gefunden?
2 Rayan	Fünf mal fünf.
3 Lehrerin	Warum?
4 Rayan	Weil es hier *[zeigt auf die erste Spalte]* fünf sind und hier *[zeigt auf die erste Zeile]* fünf sind.
5 Lehrerin	Zeig mir mal einen Fünfer. Tanya du auch, zeig mir mal einen Fünfer.
	...
8 Rayan	Das ganze hier *[zeigt die ausgemalte obere Zeile mit 5 Kästchen]*.
	...
10 Lehrerin	Malt bitte in einer anderen Farbe den anderen Fünfer an.
	...
15 Rayan	Hier *[zeigt auf die erste Spalte mit fünf Kästchen]*.
16 Lehrerin	Nee, ihr habt beide das Kästchen doppelt angemalt.
17/18 Lehrerin	*[zeichnet neues Rechteck-Feld]*
19 Lehrerin	Rayan mal du bitte mal einen Fünfer an. Ein Fünfer besteht aus wieviel Kästchen?
20 Rayan	Gut. *[malt eine Spalte an]* Fünf.
21 Lehrerin	Richtig. Jetzt mal den zweiten. Zwei Fünfer.
22 Rayan	*[malt eine zweite Spalte an]*
23 Lehrerin	Tanya bei dir geht es jetzt auch weiter. Mal mal den dritten Fünfer an.
24 Tanya	Dritten Fünfer?
25 Lehrerin	Ja. Jetzt hast du zwei Fünfer angemalt, wo ist der dritte Fünfer?
26 Rayan	*[Malt eine dritte Spalte an]*
27 Tanya	Ich weiß es, in der Mitte *[malt in eine dritte Spalte an]*.
28 Rayan	*[Malt eine dritte Spalte an]*
29 Lehrerin	Wo ist der vierte Fünfer?
30 Rayan	Haben wir net.
31 Tanya	Doch hier. Und hier ist der fünfte Fünfer *[zeigt auf die fünfte Spalte]*.
32 Rayan	*[Malt ebenfalls eine vierte und fünfte Spalte an]*
33 Lehrerin	Und jetzt habt ihr wie viele insgesamt angemalt?
34 Tanya	25.
35 Lehrerin	Genau. 5 mal 5. Es geht um Fünfer, die müsst ihr mehrmals nehmen, nämlich 5-mal.

Obwohl Rayan und Tanya an Würfelbildern die Phrase von zwei Fünfern bereits kennen gelernt haben, ist die Übertragung auf kontextbezogene Rechteckbilder keineswegs trivial, denn sie fallen zurück in die getrennte Adressierung von Zeilen und Spalten (Turn 8–15). Erst das sukzessive Hochzählen ein 5er, zwei 5er, drei 5er, vier 5er, fünf 5er bringt den Mädchen Klarheit, wie man in Bündeln zählt. Die Szene zeigt, dass das neue Denkwerkzeug erst in seiner Bedeutung etabliert werden muss, bevor es für die Kinder nutzbar wird.

Die nun auch für Rechteckdarstellungen eingeführte Phrase können die Mädchen nach dieser Sequenz auch auf andere Aufgaben übertragen: Für die Törtchen der nächsten Aufgabe, die in drei 7er-Reihen aufgestellt sind, zählt Rayan hoch „ein 7er, zwei 7er, drei 7er“ und schließt daraus auf die Multiplikation $3 \cdot 7$.

In der nächsten Fördersitzung kann Rayan mithilfe des Sprachmittels auch die Nicht-Passung von graphischen und symbolischen Darstellungen begründen. Das Transkript setzt ein, als Rayan mithilfe von *drei Fünfern* begründet, warum das Haken-Bild (erstes Bild in Abb. 7) nicht zur Aufgabe $3 \cdot 5$ passt (FS5 ab ca. 42:00):

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

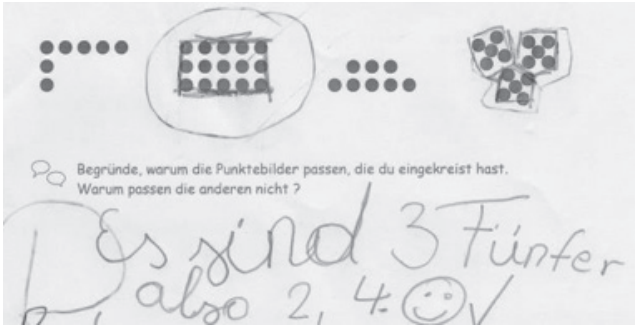


Abbildung 7. Folgeaufgabe Passende Bilder suchen.

21 Rayan	Weil es hier .. also nicht drei Fünfer sind ... sondern es ist einfach die Aufgabe drei plus fünf. Das wars. Nix. ...
24 Lehrkraft	Rayan magst du es noch einmal wiederholen?
25 Rayan	Weil es, es da gibt's keine Fünfer. Da gibt's nur einmal fünf und net drei-mal. Des hier stimmt und net das da.
26 Lehrerin	Okay, Tanya, das ist eine gute Idee, ne? Fünf mal drei heißt hier nochmal wieviel? Wenn man es hiermit *[zeigt auf den Sprachspeicher mit vier 5ern]* nochmal ausdrücken ...
27 Tanya	Drei Fünfer.
28 Lehrerin	Genau. Siehst du hier drei Fünfer in dem Bild? *[zeigt auf das Haken-Bild]*
29 Tanya	Hier nicht, nee.
30 Lehrerin	Darum passt das Bild nicht. Und weil man das Ergebnis nicht sehen kann. Was ist mit dem zweiten Bild *[das Rechteckfeld]*?
31 Tanya	Passt.
32 Lehrerin	Warum?
33 Tanya	*[zeigt das Rechteckfeld und seine Zeilen]* Weil hier ist die erste Zahl drauf und die zweite Zahl und hier nochmal die fünf und nochmal die fünf.
34 Rayan	Drei Fünfer eben!

Die Szene zeigt, dass sich Rayan schließlich den Ausdruck *drei Fünfer* zu eigen gemacht hat, denn sie benutzt dieses Sprachmittel als Denkwerkzeug, um das Haken-Bild und das Rechteck-Bild auf Passung prüfen zu können, indem sie die multiplikative Bündelstruktur expliziert (Turn 25 und 27). Rayan scheint mit dem Sprachmittel auch die multiplikative Bündelstruktur verinnerlicht zu haben, was als Hinweis gewertet wird, dass sie die Konzeptentwicklung für das Multiplikationskonzept vollzogen hat. Bei Tanya dagegen ist weiteres Einüben in handlungsbegleitetes Sprechen notwendig, bevor auch sie die Bündelstruktur sicher verinnerlicht.

Die Transkripte zeigen außerdem, dass solche Lernfortschritte nicht nur geeignete Aufgaben und Sprachangebote erfordern, sondern die Lehrerin viel in die Moderation investieren muss, um

- die Passung zwischen Darstellungen zu prüfen und damit eine explizite Vernetzung anzuregen (Turn 28, 30: Nachfragen zur Passung als Impulse zur *Darstellungsvernetzung*)
- die Lernenden zu diskursiv reichhaltigen Sprachhandlungen zu bringen statt sich mit Einwort-Antworten und Halbsätzen zu begnügen (z. B. Turn 24 und 32; Explizierungsaufforderungen als Impulse zur *Kommunikationsförderung*)
- das bereits Erreichte zu sichern und zu explizieren (z. B. Turn 30: Zusammenfassungen zur Sicherung der *Verstehensorientierung*)
- die eingeführten Sprachmittel auch tatsächlich in den aktiven Sprachgebrauch der Lernenden zu heben (Turn 26: Verweis auf Sprachspeicher als Impulse entlang des *Makro-Scaffoldings*).

Einblicke in eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung des Multiplikationskonzepts im Rahmen der Prozentrechnung in Klasse 7

Die fach- und sprachintegrierte Unterrichtseinheit zur Prozentrechnung wurde gemäß der skizzierten Designprinzipien entlang der in Abbildung 4 formulierten Lernpfade entwickelt. Für das Regelspektrum der Heterogenität wurde bereits empirische Evidenz zur Lernwirksamkeit erbracht (Pöhler & Prediger, 2018). Im derzeitigen Forschungsprojekt wird im Hinblick auf Inklusion untersucht, wie die Einheit auch für Lernende mit sonderpädagogisch festgestelltem Förderbedarf Lernen zugänglich zu machen ist.

Dazu wurden Designexperimente mit Lernenden mit Förderschwerpunkt Lernen zu den ersten Schritten des Lernpfads durchgeführt und die dabei auftauchenden Hürden auf die Ursachen in fehlenden Verstehensgrundlagen, Sprachhandlungen und Sprachmitteln qualitativ analysiert. Erarbeitet wurde daraufhin eine Basisfassung des Unterrichtsmaterials, in dem die identifizierten Vorwissensaspekte integrativ erarbeitet und im gemeinsamen Lernen auf die höheren Lernstufen bezogen werden können (Strucksberg & Prediger, 2018).

Natascha ist eines der Förderkinder Lernen in einer 7. Gesamtschulklasse. Sie hat bereits gelernt, mit dem Prozentstreifen hochzurechnen und damit einen verstehensorientierten und flexiblen Zugang zu den Proportionalitätsbetrachtungen der Prozentrechnung zu entwickeln (statt einem rein schematischen Zugriff über das Dreisatz-Schema). In der in Abbildung 8 abgedruckten Aufgabe muss sie nun zunächst auf 10 % runterrechnen, bevor sie hochrechnen kann, dabei stellen sich typische Herausforderungen im Multiplikationskonzept. Ihre Mitschülerin Anita hat die

 © 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

blauen Bögen für das Zählen in Schritten eingezeichnet und beginnt:

4 Anita	Ich weiß, 10 % sind 3 MB.
5 Lehrerin	Halt, stopp. Wieso kommt sie auf 3 MB?
6 Natascha	Weil man in 3er Schritten geht? 3, 6, 9 *[Zeigt auf Prozentstreifen]*.
7 Lehrerin	Und warum, wie kommt sie auf die 3er Schritte?
8 Natascha	Weil hier 9 ist. *[Zeigt auf Prozentstreifen]* Und dann muss man einfach, äh 30 geteilt durch 9 rechnen, das sind dann#
9 Anita	#9 durch 3 teilen
10 Natascha	Ja also durch 3 rechnen.
11 Lehrerin	Stopp. Wir rechnen nicht 30 geteilt durch 9. Sondern ... *[im weiteren wird erarbeitet: sondern wir teilen 30 in drei 10er-Schritte und dann die 9 auch in drei Schritte, also drei 3er Schritte]*

Aufgabe am Prozentstreifen

Leonie hat schon 9 MB einer App heruntergeladen. Das sind 30 % der ganzen App. Wie viel MB hat die ganze App?



Abbildung 8. Aufgabe am Prozentstreifen mit Herausforderungen im Multiplikationskonzept.

Natascha gelingt hier der Übergang vom Zeichnen zum Rechnen nicht. Sie verwechselt 3er-Schritte mit drei Schritten (was auch durch eine irritierende Zahlendopplung gestärkt wird, Turn 6). Beim Versuch der Lehrerin, die Aufgabe mit ihr tiefer zu durchdringen (Turn 7), weicht Natascha aus auf die willkürliche Kombination der aufgeschriebenen 30 und 9, dazu ist die fehlende Begründung ein wichtiger Indikator (Turn 8). Sie argumentiert nicht über die Anzahl der Schritte und aktiviert keine Grundvorstellung der Division, weder die Grundvorstellung der Division als Verteilen noch als Passen-In (die beide auf das Multiplikationskonzept zurück zu führen sind). Das nicht stabile Multiplikationskonzept erweist sich demnach auch in Klasse 7 noch als zentrale Verstehensgrundlage, hier am Beispiel des proportionalen Hoch- und Runterrechnens am Prozentstreifen.

Um die Erkennung der multiplikativen Strukturen für die Förderkinder (mit und ohne sonderpädagogischem Förderbedarf) zu stärken, wurde die Einheit daher angereichert um Rituale des Zählens in Schritten mit der entsprechenden sprachlichen Begleitung:

- Auf der oberen Skala kann man zählen: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, in *zehn 10er-Schritten* läuft man zur 100, denn 10 · 10 sind 100.
- Auf der unteren Skala kann man zählen 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. 30. Das heißt, in *zehn 3er-Schritten* läuft man zur 30, denn 10 · 3 sind 30.

Wenn das isolierte Zählen in Schritten mit der Phrase der *zehn 3er-Schritte* eingeübt und mit der Multiplikation verknüpft ist, dann kann auch in doppelten Schritten gezählt werden:

- Bei 10 % sind es 3 GB, bei 20 % sind es 6 GB, bei 30 % sind es 9 GB, bei 40 % sind es 12 GB.
- In *vier 10er-Schritten* kommt man zu 40 %, in *vier 3er-Schritten* zu 12 GB. 4 · 3 = 12

In den Erprobungen zeigte sich deutlich die kognitive Entlastung in den Denkprozessen durch den kompakten Ausdruck *vier 3er-Schritte*. Folgende Ausdrucksweise ist gerade für Lernende mit begrenztem Arbeitsgedächtnis nicht wirklich nutzbar:

- Die Schritte unten sind immer 3 GB lang, es sind 4 Schritte, die immer 3 GB lang sind. Also 4 · 3 = 12

Bevor die Denkhandlung zur Entlastung werden kann, muss sie allerdings

- genügend aufgefaltet und inhaltlich verstanden werden (so wie bei Rayan und Tanya).
- hinreichend eingeübt und automatisiert werden (durch häufig wiederholtes Zählen in Schritten).
- mit allen vier Grundaufgaben gut verknüpft werden: vier 2er sind 8, also 4 · 2 = 8 und 2 · 4 = 8 und 8 : 4 = 2 und 8 : 2 = 4 (denn in die 8 passen vier 2er hinein).

Für diese Lernschritte kann das Sprachmittel der vier 2er (auch bei Einführung erst in Klasse 7) zu einem kraftvollen Denkwerkzeug werden, das nicht nur von den Förderkindern, sondern der ganzen Klasse benutzt werden kann. Mögliche Hinweise auf die Funktion als Denkwerkzeug gibt es auch aus Designexperimenten aus inklusiven Klassen, aus deren Klassengespräch hier ein Ausschnitt abschließend gezeigt wird:

17 Lehrerin	Ihr wollt in 5 Schritten zur 100 kommen, wie groß müssen die Schritte denn dann sein?
18 Paul	Bei vier Schritten wären es ja 25er Schritte, also etwas kleiner. Ah, vielleicht .... Fünf 20er Schritte müssten passen, oder? 20, 40, 60, 80, 100
19 Lisa	Brauchen wir eigentlich gar nicht zählen, oder? Geht auch 100 durch 5?
20 Lehrerin	Wieso 100 durch 5?
21 Paul	Ach, ich weiß, wieso: fünf 20er sind 100, weil 5 · 20. Also Durch, weil ich ja suche.

(Matilda-Videomaterial aus Zyklus 1)

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

Forschungsmethoden

Der Artikel stellt Zusammenhänge her zwischen mehreren Forschungsprojekten, die sich verschiedener Forschungsformate bedienen und damit verschiedene Wissensformen generieren:

- *Large Scale Assessments* sind schriftliche Leistungsstudien mit großen Stichproben (hier n = 1493). Sie können durch Korrelations- und Regressionsanalysen oder Gruppenvergleiche Beschreibungswissen über die Stärke der korrelativen Zusammenhänge zwischen Fachleistung und Sprachkompetenz generieren, bieten jedoch kein Erklärungswissen.
- *Denkprozessanalysen* erfolgen in videobasierten Interview-Fallstudien, die per lautem Denken die Denkprozesse von Lernenden (hier n = 20) qualitativ untersuchen, um die sprachlichen Anforderungen zu identifizieren. So wird das Beschreibungswissen um Erklärungswissen ergänzt, wie sprachlich bedingte Hürden den Umgang mit konzeptuellem Verständnis beschränken. Für die qualitative Datenanalyse der Transkripte werden kategoriengeleitete und kategorienentwickelnde qualitative Auswertungsverfahren kombiniert.
- *Design Research Studien* dienen der Generierung von Handlungswissen zu fach- und sprachintegrierten Lehr-Lern-Arrangements, die die sprachlichen Anforderungen aufgreifen. Dazu werden diese systematisch in mehreren Designexperimentzyklen designed und jeweils die videographierten Lehr-Lernprozesse qualitativ untersucht (hier mit n = 23 Lernenden aus Klasse 3 und 7). Ziel ist die iterative Weiterentwicklung der Lehr-Lern-Arrangements, aber auch Theoriebildung durch Ausdifferenzierung der sprachlichen Anforderungen und durch Rekonstruktion individueller Lernwege. Generiert werden auch Hypothesen zu lernförderlichen Designprinzipien und notwendigen Lernschritten.
- *Quasi-experimentelle Interventionsstudien im Prä-Post-Follow-Up-Kontrollgruppen-Design* dienen der abschließenden Überprüfung der generierten Hypothesen, also zum *Absichern des Handlungswissens*. Dazu werden die entwickelten Lehr-Lern-Arrangements und Hypothesen zur Wirksamkeit bestimmter Designprinzipien nach den methodischen Standards der experimentellen Psychologie überprüft. Eine Interventionsstudie macht allerdings erst Sinn, wenn sorgfältig entwickelte und iterativ optimierte Designs vorliegen. Für das in diesem Artikel thematisierte multiplikative Denken stehen die Interventionsstudien noch aus, die Lernwirksamkeit der Designprinzipien konnte jedoch für Brüche, Prozente und Funktionen bereits nachgewiesen werden.

Implikationen für die Praxis

Mathematische Schwierigkeiten und sprachlichen Schwierigkeiten sind oft verknüpft, weil Sprache ein wichtiges Denkwerkzeug bildet. Wenn den Lernenden relevante Sprachmittel fehlen, ist konzeptuelles Verständnis deutlich schwieriger aufzubauen, gerade bei eingeschränktem Arbeits-gedächtnis. Für die Gestaltung sprach- und fachintegrierter Lehr-Lern-Arrangements ist daher die Identifizierung derjenigen Sprachhandlungen und Sprachmittel notwendig, die für den Aufbau von konzeptuellem Verständnis gebraucht werden. Für den Aufbau multiplikativen Denkens betrifft das diejenigen Sprachmittel, die das mentale Bündeln (Unitizing) ermöglichen, also etwa „drei 4er". Das fach- und sprachintegrierte Lehr-Lern-Arrangement sollte dann folgende Designprinzipien berücksichtigen:

- *Verstehensorientierung* durch Inhalt vor Kalkül, d.h. zunächst sorgfältiger, sprachgestützter Aufbau von konzeptuellem Verständnis, dann per fortschreitender Schematisierung der Übergang zum Kalkül
- *Darstellungsvernetzung*, d.h. die intensive und wiederholte Verknüpfung zwischen alltagssprachlichen, bildungssprachlichen und formalsprachlichen, symbolischen, gegenständlichen und graphischen Darstellungen
- *Kommunikationsförderung*, d.h. häufige mündliche und schriftliche Einforderung diskursiv reichhaltigen Sprachhandlungen
- *Scaffolding* zum sukzessiven Aufbau der gegenstandsspezifisch relevanten bedeutungsbezogenen und formalbezogenen Sprachmittel entlang des konzeptuellen Lernpfads vom Inhalt zum Kalkül

Konkret sind die entwickelten Lehr-Lern-Arrangements zum Multiplikationskonzept, zum Volumen und zur Prozentrechnung als OER verfügbar unter http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/100. Weitere konkrete Praxisvorschläge zu anderen Themen finden sich in Prediger (2019).

© 2019 Hogrefe

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

Auch wenn Paul (Förderkind ohne sonderpädagogisch attestiertem Förderbedarf) erst von seiner Mitschülerin auf die multiplikative Struktur gestoßen werden muss, gelingt es beiden, sich über die Idee zu verständigen und nun das Zählen in Bündeln mit dem Multiplizieren und Dividieren zu verbinden. Auch Lisa (mittelstarkes Regelkind) entdeckt erst durch Pauls Denkhandlung und das Zählen in Schritten den Zusammenhang zur Division. Die Verknüpfung der verschiedenen Sprach- und Darstellungsebenen am Prozentstreifen und das Zählen in Schritten mit der Ausdrucksweise fünf 20er macht für beide die multiplikative Struktur explizit.

Diskussion

Auch wenn die Einblicke in verschiedene Forschungsprojekte hier nur kursorisch bleiben konnten, zeigt sich am Beispiel des Multiplikationskonzepts nicht nur in korrelativen Befunden, dass mathematische Lernschwierigkeiten eng mit sprachlichen Schwierigkeiten zusammen hängen können, sondern auch warum: Gemäß der kognitiven Funktion von Sprache können geeignete Sprachmittel (wie hier die Phrase *drei 4er*) kraftvolle Denkwerkzeuge für neue Denkhandlungen (wie hier das *Unitizing*) bieten. Ist das sprachliche Denkwerkzeug dagegen nicht verfügbar, werden auch mentale Prozesse erschwert.

Ausschnitte aus gezielt initiierten fach- und sprachintegrierten Lehr-Lernprozessen zeigen, wie das Angebot geeigneter Sprachmittel die konzeptuellen Lernprozesse unterstützen kann, indem sie die Verknüpfung von graphischen, textlichen und symbolischen Darstellungsebenen unterstützen und damit zum Konzeptaufbau beiträgt. Allererste Lernprozessanalysen in Bezug auf Lernende mit Förderbedarf geben Hinweise, dass diese in anderen Themenbereichen und mit anderen Lernenden bereits bewährte Kombination von Designprinzipien gerade im Umgang mit mathematischen Lernschwierigkeiten ihre besondere Kraft entfalten könnte. Dies gilt es im Weiteren auch durch quantitative Wirksamkeitsnachweise zu belegen.

Literatur

Akinwunmi, K., Deutscher, T. & Selter, C. (2014). Baustein N4: Multiplikation und Division verstehen. In C. Selter, S. Prediger, M. Nührenbörger & S. Hußmann (Hrsg.), *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept* (S. 39 – 45). Berlin: Cornelsen.

Bailey, A. L., Blackstock-Bernstein, A. & Heritage, M. (2015). At the intersection of mathematics and language: Examining mathematical strategies and explanations by grade and English learner status. *Journal of Mathematical Behavior, 40*, 6 – 28.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: MA: Harvard University Press.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Hrsg.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (S. 19 – 32). London: Lawrence Erlbaum.

Cawley, J. F., Parmar, R. S., Foley, T. E., Salmon, S. & Roy, S. (2001). Arithmetic performance of students. Implications for standards and programming. *Exceptional Children*, *67*(3), 311 – 328.

Ehlert, A., Fritz, A., Arndt, D. & Leutner, D. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematikdidaktik, 34*(2), 237 – 263.

Gibbons, P. (2002). *Scaffolding Language, Scaffolding Learning.* Portsmouth: Heinemann.

Götze, D. (im Druck). The cognitive function of language and its influence on the learning mathematics in inclusive settings. In M. Knigge, D. Kollosche, O. Skovsmose, R. Marcone, M. Penteado (Hrsg.), *Inclusive mathematics education: Research results from Brazil and Germany*. Berlin: Springer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155 – 177.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L., Braun, C. & Reiss, K. (2011). Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit* (S. 11 – 33). Münster: Waxmann.

Lamon, S. J. (1996). The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170 – 193.

Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch, 78*, 9 – 11.

Mann Koepke, K. & Miller, B. (2013). At the intersection of math and reading disabilities: Introduction to the special issue. *Journal of Learning Disabilities, 46*, 483 – 489.

Morek, M. & Heller, V. (2012). Bildungssprache – Kommunikative, epistemische, soziale und interaktive Aspekte ihres Gebrauchs. *Zeitschrift für angewandte Linguistik, 57*(1), 67 – 101.

Moschkovich, J. (2013). Principles and Guidelines for Equitable Mathematics Teaching Practices and Materials for English Language Learners. *Journal of Urban Mathematics Education, 6*(1), 45 – 57.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie*. Bern: Haupt.

Paetsch, J., Radmann, S., Felbrich, A., Lehmann, R. & Stanat, P. (2016). Sprachkompetenz als Prädiktor mathematischer Kompetenzentwicklung von Kindern deutscher und nicht-deutscher Familiensprache. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und pädagogische Psychologie, 48*(1), 27 – 41.

Pöhler, B. (2018). *Konzeptuelle und lexikalische Lernpfade und Lernwege zu Prozenten – Eine Entwicklungsforschungsstudie.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Pöhler, B. & Prediger, S. (2017). Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 436 – 459). Weinheim: Beltz.

Prediger, S. (2019). *Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe – ein forschungsbasiertes Praxisbuch*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. & Wessel, L. (2018). Brauchen mehrsprachige Jugendliche eine andere fach- und sprachintegrierte Förderung als einsprachige? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 21*(2), 361 – 382. doi.org/10.1007/s11618-017-0785-8

Prediger, S., Erath, K. & Moser Opitz, E. (2019). The language dimension of mathematical difficulties. In A. Fritz, V. Haase, P. Räsänen (Hrsg.), *International Handbook of math learning*

© 2019 Hogrefe

difficulties: From the laboratory to the classroom (S. 437 – 455). Cham: Springer.
Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(1), 77 – 104.
Stanat, P. (2006). Disparitäten im schulischen Erfolg: Forschungsstand zur Rolle des Migrationshintergrunds. *Unterrichtswissenschaft, 36*(2), 98 – 124.
Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (S. 3 – 39). Albany: State University of New York Press.
Strucksberg, J. & Prediger, S. (2018). Spezifizierung von Verstehensgrundlagen von Prozenten und ihr Nutzen für den inklusiven Mathematikunterricht. In Fachgruppe Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1763 – 1766). Münster: WTM.
Thomas, K., Schulte-Körne, G. & Hasselhorn, M. (2015). Stichwort – Entwicklungsstörungen schulischer Fertigkeiten. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 18*(3), 431 – 451.
Totaro D. (2018). Welche Sprachmittel sind für Darstellungsvernetzungs-aktivitäten bei der Multiplikation relevant? – Durchführung und Analyse eines Förderprojektes im dritten Schuljahr. Unveröffentlichte Masterarbeit. Betreut von S. Presiger, TU Dortmund.

Historie
Manuskript eingereicht: 01.11.2018
Manuskript nach Revision angenommen: 28.02.2019
Onlineveröffentlichung: 17.04.2019

Förderung
Die Forschungsarbeiten wurden im Rahmen der zwei BMBF-Projekte DoProfil (das im Rahmen der gemeinsamen Qualitätsoffensive Lehrerbildung von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert wird) und Matilda (BMBF-Förderkennzeichen 01NV1704) angefertigt.

Danksagung
Ich danke Daniela Götze für die gute Kooperation und Judith Strucksberg und Debora Totaro für die Mitarbeit an Erprobungen und Analysen.

ORCID
Susanne Prediger
https://orcid.org/0000-0001-6541-259X


Foto: DZLM

Prof. Dr. Susanne Prediger
Technische Universität Dortmund
Institut für Entwicklung
und Erforschung
des Mathematikunterrichts
Fakultät für Mathematik
Vogelpothsweg 87
44221 Dortmund
Deutschland
prediger@math.uni-dortmund.de

https://econtent.hogrefe.com/doi/pdf/10.1024/2235-0977/a000268 - Tuesday, January 28, 2020 7:12:16 AM - Universitätsbibliothek Dortmund IP Address:129.217.150.88

© 2019 Hogrefe