Gerster, H.-D. (2009b): Probleme und Fehler bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hrsg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. 2. Auflage. Weinheim/Basel: Beltz, S. 269–284.
Humbach, M. (2008):Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen. Berlin: Köster.
Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.
Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: mathematik lehren, 123 (April 2004), S. 4–8.
Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.
Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche. Dezimalbrüche. 3. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
Schmidt, S. (2009): Arithmetische Kenntnisse am Schulanfang – Befunde aus mathematikdidaktischer Sicht. In: Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hrsg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. 2. Auflage. Weinheim/Basel: Beltz, S. 77–97.
Schmidt, S./Weiser, W. (1993): Semantische Strukturen von einfachen Textaufgaben zu den Grundrechenarten. In: Becher, H.R./Bennack, J. (Hrsg.) (1993): Taschenbuch Grundschule. Baltmannsweiler: Schneider, S. 281–295.
Selter, C./Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett Grundschulverlag.
Streefland, L. (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Winter, H. (1999/2005): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/38/bruchrechnung.pdf.
Winter, H. (2004): Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. In: mathematik lehren, 123 (April 2004), S. 14–18.
Wittmann, E.C./Müller, G.N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.
Wittmann, E.C./Müller, G.N. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett.
Wittmann, E.C./Müller, G.N. (2007): Blitzrechnen 3/4. Das interaktive Kopfrechenprogramm aus »mathe 2000«. Stuttgart: Klett.
Wittmann, G. (2007): Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. In: mathematik lehren, 142 (Juni 2007), S. 15–19.

Ludwig Bauer

Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule

Fallstudien zum Bruch- und Prozentrechnen

1. Einführende Bemerkungen

1.1 Diagnose und Förderung

Diagnose und Förderung galten früher als Schlüsselbegriffe der auf Sonderschulen abzielenden »Behindertenpädagogik«. Heute sind Diagnose und Förderung pädagogisch-didaktische Grundanliegen für den Unterricht in allen Schularten und für alle Schülergruppen. Beide Begriffe haben eine personale Grundorientierung. Im Blickpunkt stehen die Bedürfnisse und Perspektiven der Schülerinnen und Schüler im Lernprozess, nicht in erster Linie zu verändernde Bedingungen des Curriculums oder des Schulsystems.

Diagnose meint, Lernprozesse
- genau beobachten und kritisch prüfen,
- hinsichtlich der wichtigsten Variablen systematisch beschreiben,
- in ihrem Wirkzusammenhang zusammenfassend beurteilen.

Diagnose kann sich beziehen auf
- Voraussetzungen, Kompetenzen, Aneignungsprozesse, Schwierigkeiten, Fehler der Schülerinnen und Schüler (Schülerdiagnose),
- Art, Struktur, Beschaffenheit des Lernstoffes (Stoffdiagnose),
- Formen, Merkmale, Wirkungen des Unterrichts (Unterrichtsdiagnose).

Diagnose kann eher lernprozessbegleitend durchgeführt werden (z.B. durch Beobachtungen, Befragungen, Portfolios) oder eher lernproduktorientiert (Analyse von Schülerarbeiten, Tests). Beide Formen sind je für sich sinnvoll. In ihrem Zusammenspiel ergänzen und stützen sie sich gegenseitig.

Fördern meint
- vorhandene Ansätze und Kompetenzen von Schülern feststellen (Diagnose, siehe oben), anerkennen (Bestätigung) und ausbauen (Weiterentwicklung),
- Schwierigkeiten produktiv nutzen und Fehlvorstellungen korrigieren,

- Lücken in den Kenntnissen und Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern schließen (Behebung).

Je nach Zeitpunkt der Förderung unterscheidet man folgende Arten:
- prospektiv (vorausschauend; Vorbeugung, Vorbereitung für künftige Lernprozesse),
- begleitend (aktueller Lernprozess),
- retrospektiv (zurückblickend; Weiterentwicklung, Verbesserung, Behebung).

Alle Schüler haben in allen Jahrgangsstufen, in allen Schularten und in allen Fächern ein Recht darauf, gefördert zu werden. Diagnostizieren und Fördern sind daher unverzichtbare, wesentliche Bausteine für eine Professionalisierung des Lehrerberufs.

1.2 Fallstudien zum Bruch- und Prozentrechnen

Das Bruch- und Prozentrechnen gilt im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I als zentrales Gebiet, das für eine Realisierung der Ziele dieser Schulstufe unverzichtbar ist. Aus Sicht der Schüler gilt das Gebiet als problembeladen, schwierig und fehleranfällig. Es gibt zahlreiche Untersuchungen, in denen einschlägige Schwierigkeiten und Fehler zu Brüchen und Prozenten genauer untersucht werden, meist auf der Grundlage einer hohen Zahl von schriftlichen oder mündlichen Schülerbearbeitungen zu entsprechenden Aufgaben (siehe z.B. Berger 1989; Padberg 2002; Herden/Pallack 2000). Im Folgenden sollen diese Untersuchungen durch Fallstudien ergänzt werden, in denen ausgewählte Schülerbearbeitungen mathematischer Aufgaben analysiert und reflektiert werden (produktorientierte Materialanalysen). Im Vordergrund steht dabei nicht die Gewinnung repräsentativer Aussagen über große Schülerpopulationen, sondern die Erfassung und Beschreibung interessanter, aussagekräftiger Einzelfälle und -phänomene in ihrer Vielschichtigkeit und Spezifität (zur Legitimation und Relevanz einer pädagogisch-didaktischen Kasuistik siehe z.B. Binneberg 2006). Die Fallstudien bleiben möglichst nah am Handlungsfeld des reflektierenden Praktikers. Auf diese Weise werden Möglichkeiten für eine Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule aufgezeigt, wie sie auch auf der Ebene der lokalen Lehreraus- und -fortbildung ins Auge gefasst werden können und wie sie in der vorliegenden Weise häufig durchgeführt wurden. Aufgaben und Schülerbearbeitungen haben eine exemplarische Funktion. Sie dienen als Anlass, um die Selbstinitiative und Expertise von Schulen und Lehrern zu stärken und einen pädagogisch-didaktischen Diskurs zu initiieren (Altrichter 2002). Die Fallstudien nehmen somit Bezug zu einem Fundamentalsatz der Schulentwicklungsforschung, demzufolge die Einzelschule Ort der Qualitätsentwicklung von Schule sei, weil nur deren Lehrkräfte in der Lage sind, die schulischen Leistungen von Schülerinnen und Schülern zu fördern (mehrfache Zitationsreihe; z.B. in Sommer 2004, S. 269).

1.3 Aufgabenmaterial

Im Auftrag des Staatsministeriums für Unterricht und Kultus werden im Bundesland Bayern zentrale Jahrgangsstufentests für das Fach Mathematik in der Hauptschule durchgeführt. Mit diesen Tests sollen die mathematischen Kompetenzen von Schülern in curricularen Kernbereichen geprüft werden (Basiskompetenzen). Ähnliche zentrale Lernstandserhebungen werden inzwischen auch in anderen Bundesländern durchgeführt. In Bayern finden diese unmittelbar zu Beginn eines Schuljahres statt (Mitte September). Auf diese Weise soll gewährleistet werden, dass keine direkte, unmittelbare Vorbereitung auf die Tests stattfinden kann, sondern langfristig verfügbares Basiswissen geprüft wird. Die Sinnhaftigkeit solcher zentralen Jahrgangsstufentests ist durchaus umstritten. Sowohl in der didaktischen Literatur als auch auf der Ebene einer mündlich-alltagssprachlichen Einschätzung in der betroffenen Lehrerschaft gibt es zahlreiche Argumente pro und contra (siehe z.B. Sundermann/Selter 2006).

Im Folgenden werden ausgewählte Aufgaben und zugehörige Schülerbearbeitungen des Mathematiktests 2004 für die achte Jahrgangsstufe der bayerischen Hauptschule aus dem Bereich Bruch- und Prozentrechnen analysiert (siehe auch Bauer 2006). An diesem Test haben insgesamt 51 934 Hauptschüler der achten Jahrgangsstufe teilgenommen, und zwar 42 305 Schüler von R-Klassen (das sind solche, die nach neun Jahren zum Regelabschluss der Hauptschule führen) und 9 629 Schüler von M-Klassen (das sind solche, die nach zehn Jahren zum Abschluss der Mittleren Reife an der Hauptschule führen).

Materialien zum Test (Aufgaben, Durchführung, Korrektur, Auswertung, Ergebnisse, Legitimation, mögliche Weiterarbeit) findet man unter www.isb.bayern.de. Für die Analyse dieser Aufgaben ist es allerdings nicht erheblich, dass es sich um Aufgaben eines Jahrgangsstufentests handelt. Eine solche Analyse kann mit klasseninternen Übungs- oder Prüfungsaufgaben in gleicher Weise durchgeführt werden. Bei den im Folgenden ausgewählten Schülerbearbeitungen richtet sich der Blick vorwiegend auf leistungsschwache Schüler, die bereits bei der Bearbeitung einfacher, elementarer Aufgaben Schwierigkeiten haben. Diagnose und Förderung scheinen in solchen Fällen besonders dringend und virulent.

2. Fallstudien

2.1 Aufgabe A

Aufgabenstellung/Aufgabenprofil

A: Schreibe als Dezimalbruch

a) $\frac{1}{4} =$ ______ b) $\frac{3}{5} =$ ______

- Die Umwandlung einfacher gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche gehört ohne Zweifel zu den zentralen, unverzichtbaren Kompetenzen im Bereich des Bruchrechnens. Sie werden in der sechsten Jahrgangsstufe erlernt und sollten ab dann von allen Schülern beherrscht werden und jederzeit verfügbar sein.
- Der Lösungserfolg der Schüler beträgt bayernweit bei Schülern der Regelklassen 67 Prozent (Teil a) und 55 Prozent (Teil b). Dies zeigt, dass die Erfolgsquote bei weniger geläufigen Brüchen (wie $\frac{3}{5}$) gegenüber einfachen Stammbrüchen (wie $\frac{1}{4}$) noch einmal deutlich absinkt. Insgesamt gehören die Aufgaben zwar zu denjenigen, die mit am besten bearbeitet werden. Andererseits ist ein Drittel (Teil a) bzw. fast die Hälfte der Schüler (Teil b) in der achten Jahrgangsstufe nicht in der Lage, diese Aufgaben richtig zu lösen. Damit kann man nicht zufrieden sein. Vermutlich hat man es hier mit leistungsschwachen Schülern der Hauptschule zu tun, die empirischen Befunden zufolge oft auf dem rechnerischen Niveau der Grundschule stehenbleiben bzw. oft nicht einmal dieses sicher beherrschen.

Schülerbearbeitungen/Interpretationen

Auf den ersten Blick scheinen die folgenden Schülerbearbeitungen mit den Nummern 1, 2 und 3 eher chaotisch, konzeptlos, unsystematisch, zufällig. Eine genauere Analyse lässt Interpretationen zu, denen zufolge die Schülerbearbeitungen möglicherweise durch systematische Überlegungen zustande gekommen sind.

Schüler 1: *a)* $\frac{1}{4} = 0{,}1$ *b)* $\frac{3}{5} = 0{,}3$

Mögliche Vorgehensweise von Schüler 1: Übernimmt Zähler des gewöhnlichen Bruchs als erste Dezimalstelle eines Dezimalbruchs der Form 0.

Schüler 2: *a)* $\frac{1}{4} = 4$ *b)* $\frac{3}{5} = 1{,}27$

Mögliche Vorgehensweise von Schüler 2: Eventuell ist die Vorstellung vorhanden, dass der Bruchstrich einen Teilungsvorgang bedeutet. Es folgt die Rechnung »Nenner geteilt durch Zähler« (statt umgekehrt):

bei a: 4 : 1 = 4;
bei b: 5 : 3 = 1 Rest 2 (Rest 2 wird notiert)
20 : 3 = 7 (ungefähr/Rundung)
insgesamt 5 : 3 = 1,27.

Schüler 3: *a)* $\frac{1}{4} = 0{,}425$ *b)* $\frac{3}{5} = 0{,}36$

Mögliche Vorgehensweise von Schüler 3: Übernimmt Nenner (bei a) bzw. Zähler (bei b) als erste Dezimalstelle nach dem Komma. Hier ist der Schüler also innerhalb

seines Denkens nicht konsequent. Er wechselt die Strategie, was möglicherweise an der Besonderheit des Zählers 1 beim Bruch $\frac{1}{4}$ liegt. Dann folgt die Rechnung »Zähler geteilt durch Nenner«: 10 : 4 liefert die Dezimalstellen 25, 30 : 5 die Stelle 6, insgesamt die Ergebnisse 0,425 (bei a) und 0,36 (bei b).

Bei den Schülern 2 und 3 ist offenbar für die Aufgabe der Umwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche als vage Lösungsstrategie vorhanden, dass geteilt werden muss. Die genaue Strategie »Zähler geteilt durch Nenner« fehlt aber.

Diese Interpretationen wirken im ersten Moment abenteuerlich, bei längerem Nachdenken bzw. »Eindenken« aber plausibel. Dass die Schüler tatsächlich so gedacht haben, ist natürlich nur auf Grund der schriftlichen Bearbeitungen nicht zu entscheiden. Dazu müssten etwa diagnostische Interviews geführt werden. Unabhängig vom »tatsächlichen Schülerdenken« ist es aber sinnvoll, den Blick auf »mögliche Strategien« der Schüler zu richten (Aufdecken latenter Sinnstrukturen; siehe Bauer 2001).

Lösungsmöglichkeiten (Förderunterricht)

Welche Lösungsmöglichkeiten bzw. Strategien bzw. Überlegungen führen bei den Teilaufgaben a und b zum Erfolg?

1. Berechnen durch Ausdividieren (»Zähler geteilt durch Nenner«):

$\frac{1}{4}$ = 1 : 4 = 0,25
10
$\underline{-8}$
20
$\underline{-20}$
--

$\frac{3}{5}$ = 3 : 5 = 0,6
30
$\underline{-30}$
--

Erforderliche Voraussetzungen bzw. Kompetenzen:
- Grundvorstellungen zu Bruch, Bruchstrich, Zähler und Nenner, insbesondere die Einsicht, dass der Bruchstrich durch einen Divisionsvorgang ersetzt werden kann;
- Grundvorstellungen zu Dezimalbruch und beteiligten Stellenwerten;
- Fähigkeit/Fertigkeit im Ausführen des Algorithmus der schriftlichen Division.

(Der Begriff »Grundvorstellung« wird hier gemäß vom Hofe 2003 verwendet).

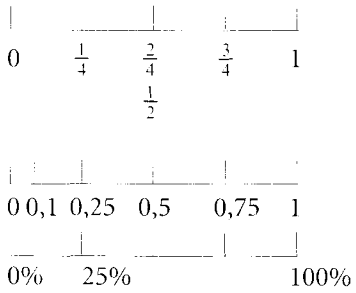
2. Erweitern auf Brüche mit geeignetem Nenner:

$$\frac{1}{4}\quad \frac{?}{10}\quad \frac{?}{100}\quad \frac{25}{100}\quad \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{3}{5}\quad \frac{?}{10}\quad \frac{6}{10}\quad \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Erforderliche Voraussetzungen bzw. Kompetenzen:
- Fähigkeit/Fertigkeit im Erweitern gewöhnlicher Brüche;
- Fähigkeit/Fertigkeit im Umwandeln von gewöhnlichen Brüchen mit Nenner 10, 100 usw. in Dezimalbrüche;
- Grundvorstellungen zu Dezimalbrüchen und beteiligten Stellenwerten.

3. Arbeit mit konkreten bzw. anschaulichen Modellen:
Infrage kommen hier verschiedene Größen bzw. deren Repräsentanten, insbesondere etwa Längen- bzw. Zahlenstrahl mit Repräsentanten wie Streifen, Stäbe, Schnüre usw. Mit ihrer Hilfe lassen sich (evtl. auch unter Einbeziehung von Prozenten) folgende Darstellungen zur Aufgabe Teil a erarbeiten:



Erforderliche Voraussetzungen bzw. Kompetenzen:
- Grundvorstellungen zu Bruch, Dezimalbruch, Prozent;
- Grundvorstellungen zu konkret-anschaulichen Modellen zur Darstellung von Brüchen, Dezimalbrüchen und Prozenten, hier insbesondere im Zusammenhang mit Längen- bzw. Zahlenstrahl.

4. Einprägen von Beziehungen zwischen Bruch, Dezimalbruch (evtl. auch Prozent):
Man kann Beziehungen erarbeiten, in Übersichten (z. B. Tabellen) zusammenfassen und dann mit geeigneten Übungen das Speichern/Einprägen der Beziehungen unterstützen (siehe Tabelle, analog auch für wichtige Brüche, die nicht Stammbrüche sind, wie z. B. $\frac{3}{5}$ usw.).

Übersicht über wichtige/häufige Brüche und ihre Darstellungen (Bruch, Dezimalbruch, Prozent):

Bruch	Wortdarstellung	Hundertstelbruch	Prozentangabe	Dezimalbruch
$\frac{1}{1}$	eins, ein Ganzes	$\frac{100}{100}$	100 %	1,0
$\frac{1}{2}$	ein Halb	$\frac{50}{100}$	50 %	0,5
$\frac{1}{3}$	ein Drittel	$\frac{33}{100}$	rund 33 %	$0,\overline{3}$
$\frac{1}{4}$	ein Viertel	$\frac{25}{100}$	25 %	0,25
$\frac{1}{5}$	ein Fünftel	$\frac{20}{100}$	20 %	0,2
$\frac{1}{8}$	ein Achtel	$\frac{12.5}{100}$	12,5 %	0,125
$\frac{1}{10}$	ein Zehntel	$\frac{10}{100}$	10 %	0,1
$\frac{2}{1} = 2$	zwei, zwei Ganze	$\frac{200}{100}$	200 %	2,0

Die didaktische Einschätzung dieser Lösungsmöglichkeiten hängt wesentlich vom Zeitpunkt bzw. Ort im Lernprozess ab, an dem sie benutzt werden:

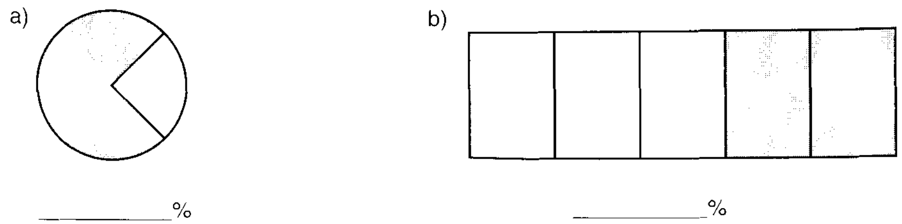
- Zeitpunkt der erstmaligen Behandlung der Aufgaben in der ganzen Klasse (sechste Jahrgangsstufe):
  Hier haben alle der vier oben genannten Lösungsmöglichkeiten ihre Berechtigung. Jede Methode zeigt wichtige Zugangsweisen zum Thema auf. Jede Methode sollte daher mit den Schülern erarbeitet werden.
- Zeitpunkt der Behandlung der Aufgaben in einem möglichen Förderunterricht für leistungsschwache Schüler (achte Jahrgangsstufe; nach Fehlern bei der Bearbeitung der Aufgaben).
  Für leistungsschwächere Schüler scheinen die Methode 1 und 2 (Ausdividieren; Erweitern) wenig geeignet. Sie sind komplex, formal bzw. verfahrenslastig und erfordern viele Lernvoraussetzungen (siehe oben). Im Förderunterricht sollten also die Methoden 3 und 4 (konkret-anschauliches Arbeiten; allmähliches Einprägen wichtiger Beziehungen zwischen Bruch, Dezimalbruch, Prozent) betont werden.

2.2 Aufgabe B

Aufgabenstellung/Aufgabenprofil

B: Wie viel Prozent der Fläche sind grau gefärbt?

Wie viel Prozent der Fläche sind grau eingefärbt?



In der Aufgabe B wird verlangt, einen an einer Kreis- bzw. Rechteckfläche grau gefärbten Anteil mit einer Prozentangabe zu bezeichnen. Hierfür sind folgende Kompetenzen erforderlich:

- Verstehen von Brüchen, insbesondere in der sogenannten Anteilsauffassung, in der die Beziehung zwischen einem Teil und einem Ganzen mithilfe eines geeigneten Zählers und Nenners ausgedrückt wird.
- Erkennen von Anteilen aus zeichnerischen Darstellungen (anschauliches Gliedern; mentales visuelles Strukturieren).
- Umwandeln gewöhnlicher Brüche in Prozentangaben.
- Verstehen des Prozentbegriffs.

Eine erstmalige Behandlung solcher Aufgaben erfolgt üblicherweise in der Jahrgangsstufe 7. Zum Zeitpunkt der Durchführung des Tests (Beginn des Schuljahres in Jahrgangsstufe 8) wurde dieser Aufgabentyp vermutlich gerade nicht explizit und intensiv wiederholt und geübt. Unabhängig davon wünscht man sich, dass ab der Jahrgangsstufe 7 möglichst jeder Schüler und jede Schülerin solche Aufgaben erfolgreich bearbeiten kann. Die Aufgaben haben hohe curriculare Relevanz und gehören zum unverzichtbaren Basiswissen.

Schülerbearbeitungen/Interpretationen

Die Lösungshäufigkeit für die Aufgabe B betrug bei den bayerischen Regelschülern 47 Prozent (Teil a) bzw. 49 Prozent (Teil b). Mit anderen Worten: Etwa die Hälfte der bayerischen Hauptschüler in Regelklassen der achten Jahrgangsstufe bearbeitete diese Aufgabe nicht richtig. Dieses Ergebnis ist ähnlich defizitär wie bei Aufgabe A (siehe Abschnitt 2.1).

Im Folgenden werden Aufgabenbearbeitungen einiger Schüler mit kurzen Hinweisen kommentiert, in denen mögliche Vorgehensweisen/Überlegungen/Strategien angedeutet werden sollen. Aufgabenbearbeitungen von Schülern siehe im Download-Bereich unter Nummer 1.

Schüler 4: a) $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{30}{100} = 30\ \%$ b) $\frac{2}{5} = \frac{20}{100} = 20\ \%$

Der Schüler arbeitet mit einer Achteleinteilung (eingezeichnete Hilfslinie im weißen Viertelfeld). Der gefärbte Teil wird dann korrekt mit dem Bruch $\frac{6}{8}$ bezeichnet, dieser dann zu $\frac{3}{4}$ gekürzt. Bei der Erweiterung von $\frac{3}{4}$ auf einen Hundertstelbruch passiert ein Fehler ($\frac{3}{4}=\frac{30}{100}$). Das Ergebnis 30% ist dann als Folgefehler zu werten.

Schüler 5: a) 7~~2~~5 %; b) 40 %

In der Teilaufgabe a beschreibt der Schüler offensichtlich zunächst den Anteil der weißen Fläche (25 %), korrigiert sich dann aber selbst 7~~2~~5 %; Wort »grau« im Text unterstrichen). Im Laufe der Bearbeitung erfolgt also eine Umstrukturierung der Aufmerksamkeit bzw. Konzentration von »weiß« zu »grau«. Insgesamt korrekt gelöst.

Schüler 6: a) 3 b) 0,4 %

Der Schüler zählt die grauen Teile, auch bei Teilaufgabe a, wo die erforderliche Viertеleinteilung nicht direkt vorhanden ist, sondern vom Schüler erkannt werden muss. Weitere erforderliche Lösungsschritte fehlen.

Schüler 7: a) 0,75 % b) 0,4 %

Wesentliche Elemente für die gedankliche Erfassung und Durchdringung der Aufgabe sind offensichtlich vorhanden. In einer möglichen Schrittfolge »Zeichnung – gewöhnlicher Bruch – Dezimalbruch – Prozentangabe« ist lediglich der letzte Schritt fehlerhaft, was auf Schwierigkeiten mit dem Prozentbegriff hindeutet. Der Vorgang des Teilens durch 100 wurde zweimal vorgenommen: einmal durch die Angabe als Dezimalbruch (0,75) und zum Zweiten durch das folgende Prozentzeichen (0,75%). Möglicherweise wurde aber das Prozentzeichen, das im Angabentext als zu beachtende Bedingung mitgeliefert wird, ignoriert. Dann hätte der Schüler richtig gedacht, sein »Fehler« bestünde nur darin, das Zeichen »%« nicht beachtet zu haben.

Schüler 8: a) $\frac{75}{100}$ % b) $\frac{20}{100}$ %

Hier liegen die Schwierigkeiten beim Schritt vom gewöhnlichen Bruch zur Prozentangabe. Sonst ähnliche Überlegungen wie bei Schüler 7.

Schüler 9: a) 135 % b) 40 %

Wie kommt die Zahl 135 bei Teilaufgabe a zustande? Vielleicht durch die Rechnung 90 + 45 = 135? Denkt der Schüler vielleicht an Winkelgrade (optisch-visuelle Nähe der Zeichen »°« (Grad) und »%« (Prozent))? Wird ein Viertel des Kreises mit 45° bzw. 45 % beschrieben, was dann zu 135 % führen würde? Erstaunlicherweise ist dann die Teilaufgabe b korrekt gelöst.

Schüler 10: a) 73,2 % b) 40 %

Bei Teilaufgabe a kann man eine Vierteleinteilung des Kreises erkennen. Wurde dann mit dem Geodreieck ein Winkel gemessen? Teil b ist korrekt.

Schüler 11: a) 25 % b) 4 %

Offensichtlich beschreibt der Schüler bei Teilaufgabe a den Anteil der weißen Fläche. Erklärung zum Ergebnis bei Teilaufgabe b?

Schüler 12: a) 0,125 % b) 0,16 %

In der Bearbeitung des Schülers erkennt man eine Achteleinteilung des Kreises. Ein Achtel des Kreises wird dann vermutlich mit dem Dezimalbruch 0,125 beschrieben. Erklärung zum Ergebnis bei Teilaufgabe b?

Schüler 13: a) 25 % b) 40 %

Vermutlich wird auch nur der weiße Teil betrachtet. Das Ergebnis bei Teilaufgabe b ist mit 40 % korrekt.

Anmerkung, insbesondere zu den Schülern 7 und 8:
Offensichtlich ist es für Schüler schwierig, die im folgenden Kasten notierten Zahlenangaben bzw. Begriffe, die ähnlich ausschauen bzw. klingen und in engen Zusammenhängen stehen, genau zu unterscheiden (in der Literatur zu Fehleranalysen nennt man dies »Schwierigkeit bzw. Fehler der Nähe«; siehe z. B. Radatz 1980):

75 %	75	0,75	?
$\frac{75}{100}$ %	$\frac{75}{100}$	0,75 %	
Hundertstel …		Prozent …	
Bruch …		Dezimalbruch	

Verstärkt werden diese Schwierigkeiten der Hundertstelbildung durch die Tatsache, dass es in Schulbüchern und Alltagssituationen zwei verschiedene Vereinbarungen hinsichtlich der Deutung des Begriffs »Prozentsatz« gibt:

Möglichkeit 1:
Prozentsatz p als Zähler des Vergleichsbruchs $\frac{p}{100}$, daraus ergibt sich die Prozentformel $P = \frac{p}{100} \cdot G$. Beispiel: bei 3% ist der Prozentsatz p = 3.

Möglichkeit 2:
Prozentsatz p als Vergleichsbruch $\frac{P}{G}$, daraus ergibt sich die Prozentformel P = p G. Beispiel: bei 3 % ist der Prozentsatz $p = \frac{3}{100} = 3$ %.

Wenn im Unterricht diese Möglichkeiten nicht klar unterschieden werden, sind Schwierigkeiten vorprogrammiert. Am besten ist es wohl, konsequent und durchgängig mit einer Interpretation zu arbeiten.

Mögliche Maßnahmen
(z. B. im Rahmen eines expliziten Förderunterrichts)

Phase 1: Erstmalige Bearbeitung von Mathematikaufgaben durch Schülerinnen und Schüler in Lern- bzw. Übungsphasen oder in Leistungsphasen (bei Prüfungen) liefern Schülerbearbeitungen, wie sie etwa oben vorgestellt wurden, insbesondere also auch fehlerhafte Bearbeitungen.

Phase 2: In nicht allzu großem Zeitabstand dazu werden den Schülerinnen und Schülern die gleichen Aufgaben mit den eigenen Bearbeitungen wieder vorgelegt. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich die Aufgaben wieder vergegenwärtigen und die eigenen Bearbeitungen in der Fördergruppe anderen Schülerinnen, Schülern und der Lehrerin bzw. dem Lehrer vorstellen und erklären. Die Vorgehensweisen und Strategien der Schülerinnen und Schüler sollten untersucht und reflektiert werden. Falls möglich, sollten fehlerhafte Bearbeitungen verbessert, ausgebaut und zu richtigen Lösungen weiterentwickelt werden (Motto: »Aus Fehlern lernen«).

Anmerkung:
Die Realisierung dieser für den Förderunterricht eminent wichtigen Phase stößt in der Praxis auf große Schwierigkeiten. Sie hängen zusammen mit einem Phänomen, das Weinert so beschreibt:

> »Beobachtet man hinreichend viele Schulklassen in ihrem alltäglichen Unterricht, so stellt man erstaunt fest, dass die durchschnittliche Zahl pseudohafter Leistungssituationen im Vergleich zu den genuinen Lernsituationen deutlich überwiegt. Manche Lehrer machen nämlich aus jedem kleinsten Frage- und Antwortspiel, jeder Stillarbeit und aus jeder gemeinsamen Aufgabenlösung an der Tafel für die Mehrzahl der Schüler eine leistungsthematische Situation. Sie äußern gegenüber einzelnen Schülern positive oder negative Erwartungen, schaffen dadurch einen permanenten Konkurrenzdruck im Klassenzimmer, kommentieren und bewerten jede Frage und jede Antwort, reglementieren die Zeit zum Nachdenken, beurteilen vor der gesamten Klasse Stärken und Schwächen einzelner Schüler; kurz: Lehrer können – oft unbewusst und völlig ungewollt – ihren Unterricht in eine Kette von Pseudo-Leistungssituationen transformieren und auf diese Weise das Lernen behindern« (Weinert 1998, S. 109, 110).

Schülerinnen und Schüler werden sich hüten, anderen ihre möglicherweise unvollständigen bzw. fehlerhaften Aufgabenbearbeitungen vorzustellen, wenn sie damit rechnen müssen, dass ihre Bearbeitungen vom Lehrer kritisiert und korrigiert werden. Für einen effektiven Förderunterricht ist es daher unumgänglich, auf leistungsthematisch geprägte Bewertungen und Beurteilungen zu verzichten. Erfahrungsgemäß gelingt dies Lehrern bei der Arbeit in kleineren Fördergruppen leichter als bei der Arbeit mit der ganzen Klasse, weil Mathematikunterricht im Klassenrahmen für

Lehrer offensichtlich untrennbar mit dem Ritual einer »Richtig-falsch«-Bewertung verbunden ist.

Phase 3: In vielen Fällen ist es nötig bzw. vorteilhaft, wenn der Lehrer im Rahmen einer strukturierten Erklärung eine Art Musterbearbeitung für die Aufgaben erstellt, in der die relevanten Teilschritte noch einmal deutlich hervorgehoben sind (Lösen von Aufgaben in »Zeitlupe«).

Für die obige Aufgabe könnten die Schritte so aussehen:

a) Das Ganze feststellen und farbig hervorheben: Kreis (bei a), Rechteck (bei b). Davon muss man ausgehen.
b) Das Ganze in gleich große Teile teilen, sodass die Einteilung zur Färbung passt und auch diese Einteilung farbig hervorheben. Die Zahl der Teile gibt den Nenner des Bruchs an ($\frac{}{4}$ bei a, $\frac{}{5}$ bei b).
c) Feststellen, wie viele Teile des Ganzen grau gefärbt sind. Die Zahl der grau gefärbten Teile gibt den Zähler an (3 bei a, 2 bei b).
d) Den gefärbten Anteil als Bruch notieren: $\frac{3}{4}$ bei a, $\frac{2}{5}$ bei b.
e) Den Bruch auf einen Hundertstelbruch erweitern:
   a) $\frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}$ b) $\frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100}$
f) Den Hundertstelbruch als Prozentangabe schreiben:
   a) $\frac{75}{100} = 75\ \%$ b) $\frac{40}{100} = 40\ \%$

Günstig ist es, wenn der Lehrer diese Schritte auf einzelne Folienstreifen notiert, die dann übereinander geschoben und zu einem einzigen Lösungsschritt verdichtet werden können (siehe im Download-Bereich unter der Nummer 2).

Phase 4: Nun ist es nötig, dass sich die Schülerinnen und Schüler diese Musterbearbeitung aktiv aneignen (Übung und Durchdringung durch mehrfache Wiederholung, vor allem durch intensive Verbalisierung). Hier sollten die Schülerinnen und Schüler die eigenen Bearbeitungen mit der Musterbearbeitung vergleichen und, soweit noch nicht geschehen, zusammenführen.

Phase 5: Vertiefung der Einsicht durch Bearbeitung von Aufgaben, in denen das Ganze und die jeweilig gefärbten Teile variiert werden (siehe im Download-Bereich unter der Nummer 3).

Phase 6: Verkürzung der Bearbeitung durch Zusammenfassen von Schritten (soweit möglich); Differenzierung in der Bearbeitung nach Umfang und Schwierigkeitsgrad.

Phase 7: Zusammenfassung

- Nochmalige Konzentration/Fokussierung der Aufmerksamkeit auf die relevanten Schritte des Lösungsprozesses (»Das Wichtigste auf einen Blick«, evtl. mit Kärtchen, auf denen die Schritte aus Phase 3 kurz und prägnant notiert sind).

- Erstellung von informativen Übersichten, in denen wichtige/häufige Brüche in verschiedenen Darstellungen notiert sind (etwa wie in der Übersicht über Brüche und ihre Darstellungen von Abschnitt 2.1).

Phase 8: Integrierendes Wiederholen, Sichern, Üben, Wiederaufgreifen von Basiskenntnissen und -fertigkeiten auch zu späteren Zeitpunkten (kumulatives, nachhaltiges Lernen).

Mögliche Arbeitsweisen:

- Sukzessives Erarbeiten der Zusammenhänge mithilfe konkreter und anschaulicher Modelle, eventuell unterstützt durch erforderliche schriftliche Rechenschritte in Nebenrechnungen; Notation der Ergebnisse auf Kärtchen; Zusammenfügen der Kärtchen in einer Gesamtübersicht.
- Wegnehmen der Kärtchen, erneutes Ordnen der Kärtchen, Wiederherstellen der Gesamttabelle (bei Bedarf mehrfache Wiederholung). Notation der Übersicht auf Tafel oder Plakat, Arbeitsblatt, Heft.
- Einprägen der Darstellungen (zuerst kleinere zusammengehörende Teile; allmähliche Erweiterung bis zu einer automatisierten Beherrschung der gesamten Tabelle, soweit möglich; Abdecken von Teilen; Wiedergabe bei geschlossenen Augen, d. h. »im Kopf«).
- Systematische Wiederholung der Bruchdarstellungen durch mechanisierende und operative Kurzübungen (insbesondere durch spielerische Übungsformen).

2.3 Aufgabe C

Aufgabenstellung/Aufgabenprofil

Berechne:

a) 30 % von 200 € sind ____ €
b) ____ % von 500 € sind 10 €
c) 20 % von ____ € sind 80 €

Die Aufgabe beinhaltet die drei sogenannten Grundaufgaben der Prozentrechnung, und zwar:

a) Berechnung des Prozentwertes P (1. Grundaufgabe); Lösungshäufigkeit 51 Prozent in Regelklassen.
b) Berechnung des Prozentsatzes p (3. Grundaufgabe); Lösungshäufigkeit 29 Prozent in Regelklassen.
c) Berechnung des Grundwertes G (2. Grundaufgabe); Lösungshäufigkeit 37 Prozent in Regelklassen.

Für die Lösung dieser Aufgaben werden in der Hauptschule in der Regel drei Methoden verwendet, die im Folgenden am Beispiel der Teilaufgabe a (30 % von 200 €) fixiert werden:

Dreisatzmethode:

100 % sind 200 €
1 % sind 200 € : 100 = 2 €
30 % sind 2 € · 30 = 60 €

Operatormethode:

$$G \xrightarrow{\cdot \frac{p}{100}} P$$

$$200\,€ \xrightarrow{\cdot \frac{30}{100}} 200\,€ \cdot \frac{30}{100} = \frac{200\,€ \cdot 30}{100} = 60\,€$$

Formelmethode bzw. Gleichungsansatz:

$$P = \frac{p}{100} \cdot G$$

$$P = \frac{30}{100} \cdot 200\,€ = \frac{30 \cdot 200\,€}{100} = 60\,€$$

Folgende Gesichtspunkte sind in eine diagnostische Analyse der Aufgabenstellung mit einzubeziehen:

- Zu jeder Methode gibt es Variationen bezüglich Darstellung bzw. Einsatz (z. B. werden bei der Dreisatzmethode oft Operatorpfeile links und rechts am Rand notiert, um die jeweiligen Rechenschritte zu verdeutlichen).
- Die Verwendung der oben genannten Methoden muss im Einzelnen dem jeweiligen Typ der Grundaufgabe angepasst werden. Beispielsweise wird bei der dritten Grundaufgabe im Dreisatzverfahren meist die Reihenfolge von Prozent- und Geldangaben vertauscht, was Schülern oft Schwierigkeiten bereitet:
  Teilaufgabe b: ___ % von 500 € sind 10 €
  500 € sind 100 %
  1 € sind 100 % : 500
  10 € sind $\frac{100\,\% \cdot 10}{500} = 2\,\%$
- Die Reihenfolge des Einsatzes der drei Methoden wird meist so gehandhabt, dass in der siebten Jahrgangsstufe die Grundaufgaben der Prozentrechnung gründlich erarbeitet und geübt werden, und zwar ausschließlich mit der Dreisatzmethode. Operatormethode und Gleichungsansatz kommen im Laufe der Jahrgangsstufe 8 und 9 als zusätzliche ergänzende bzw. flankierende Methoden hinzu. Zum Zeitpunkt der Bearbeitung der hier zu analysierenden Aufgaben waren die Schüler also nur mit der Dreisatzmethode vertraut.
- Von entscheidender Bedeutung ist nun folgender Gesichtspunkt: Das Dreisatzverfahren wird im Unterricht ausschließlich so eingeführt und geübt, das die drei Sätze/Zeilen schriftlich notiert werden. Das Dreisatzverfahren hat also den Status eines »schriftlichen Normalverfahrens« für die Grundaufgaben der Prozentrechnung, vergleichbar den schriftlichen Normalverfahren für die vier Grundrechenoperationen mit natürlichen Zahlen.
  Die äußere Gestaltung der Aufgabenstellung zur Aufgabe C ist aber so gehalten, dass die Schüler auf dem Angabenblatt gar keinen Platz haben, um bei den einzelnen Teilaufgaben a, b, c den Dreisatz schriftlich zu notieren. Statt der gewohnten und geübten schriftlichen Standardverfahren ist hier eine Bearbeitung rein »im Kopf« verlangt, worauf die Schüler im Unterricht nicht vorbereitet werden. Dies ist vermutlich ein wesentlicher Grund bei der Erklärung der niedrigen Lösungshäufigkeiten der Schüler.

Schülerbearbeitungen/Interpretationen

Aufgrund der ungewohnten Situation (fehlender Platz für schriftliche Standardverfahren mit dem Dreisatz und daraus sich ergebendem Zwang zum nicht geübten »Prozentrechnen im Kopf«) weichen viele Schülerinnen und Schüler offensichtlich auf ein unsystematisches, ungeordnetes, unbeholfenes Probieren bzw. Raten ohne nachfolgende Kontrolle aus, bei dem tragfähige, für die Aufgabenstellung relevante Strategien kaum erkennbar sind. Dazu Beispiele von Schülerbearbeitungen:

Schüler 14:

a) 30 % von 200 € sind $\boxed{20}$ €. Rechnung vermutlich: 200 : 10 = 20.

b) $\boxed{1}$ % von 500 € sind 10 €. Rechnung vermutlich: 10 : 10 = 1.

c) 20 % von $\boxed{800}$ € sind 80 €. Rechnung vermutlich: 80 · 10 = 800.

Der Schüler rechnet also offensichtlich stets : 10 oder · 10, je nachdem, ob das zu bestimmende Ergebnis größer oder kleiner als eine der Euro-Angaben werden soll.

Schüler 15:

a) 30% von 200 sind $\boxed{170}$ €. Rechnung vermutlich: 200 – 30 = 170.

b) $\boxed{490}$ % von 500 € sind 10 €. Rechnung vermutlich: 500 – 10 = 490.

c) 20 % von $\boxed{100}$ € sind 80 €. Rechung vermutlich: 80 + 20 = 100.

Der Schüler geht also von den gegebenen Zahlen aus und rechnet offensichtlich dann »große Zahl – kleine Zahl« bei den Aufgabentypen a und b bzw. »große Zahl + kleine Zahl« beim Typ c, bei der der Grundwert zu bestimmen ist.

Bei mehreren Schülern findet man die Teilaufgabe c wie folgt:

c) 20 % von $\boxed{160}$ € sind 80 €. Rechnung vermutlich 2 · 80 = 160, wobei der Faktor 2 möglicherweise aus der Angabe 20 % entnommen ist.

Man sieht, dass eine Analyse, die sich allein auf schriftliche Schülerbearbeitungen bezieht, nur zu vagen, hypothetischen Vermutungen und Spekulationen führen kann. Diagnostische Gespräche mit Schülerinnen und Schülern über die Aufgaben und über eigene Bearbeitungen könnten weitere Informationen liefern. In jedem Fall zeigen die Bearbeitungen der Schüler aber große Defizite im Hinblick auf adäquate Grundvorstellungen zu den Grundbegriffen der Prozentrechnung und auf tragfähige Strategien zur Bearbeitung der Grundaufgaben. Die Situation, dass das vertraute »Normalverfahren« des Dreisatzes nicht verwendet werden kann, verschärft die Probleme und macht sie auch nach außen sichtbar. Ohne die sonst ausschließlich verwendeten Krücken des Dreisatzschemas sind die Schüler auf die Ebene des Verständnisses zurückgeworfen. Diesbezügliche Defizite bzw. Lücken führen zu hilflosen Ratevorgängen und gravierenden Fehlern.

Mögliche Maßnahmen bzw. Konsequenzen
(Überblick über einschlägige Lehr-/Lernaktivitäten)

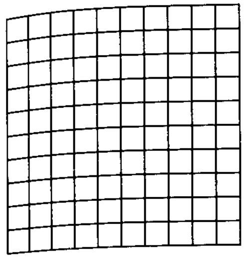
- Gründlicher Aufbau der Grundbegriffe der Prozentrechnung;
- verständnisorientierte Bearbeitung der Grundaufgaben der Prozentrechnung;
- plausibles Schließen in Anlehnung an das Dreisatzverfahren; zuerst schriftlich/mündlich, dann halbschriftlich/mündlich, dann nur noch mündlich;
- probierendes Lösen der Grundaufgaben durch Einsetzen von Zahlen mit nachfolgender Kontrolle der Ergebnisse;
- verständnisorientierte Übungen zur schriftlichen, halbschriftlichen und mündlichen Bearbeitung der Grundaufgaben (Tabellen, Aufgabenkarten, einfache Zahlenbeispiele, motivierende Übungsformen, auch für Freiarbeit bzw. offene Lernsituationen);
- Entwicklung/Förderung des proportionalen Denkens, zum Beispiel durch Erzeugen von Rechensätzen mithilfe von Proportionalitätstabellen;
- Entwicklung und Bearbeitung der Grundaufgaben mithilfe geeigneter Veranschaulichungsmittel, insbesondere mithilfe des sogenannten Prozentblattes.
- Nachdenken über die Methode(n) des Rechnens bei den Grundaufgaben (Fokussierung der Aufmerksamkeit); Untersuchen der Zahlen und der Zahlbeziehungen (Wie geht man beim Rechnen vor?); Erfassen der gedanklichen Struktur der Grundaufgaben;
- Herausarbeiten der Zusammenhänge; übersichtliche Darstellung bzw. Zusammenfassung.

Im Folgenden sollen einige ausgewählte Maßnahmen genauer erläutert werden.

Arbeit mit dem Prozentblatt

Das Prozentblatt ist eine Anordnung von 100 leeren Feldern (z. B. Quadraten) mit zehn Zeilen zu je zehn Feldern, also im Prinzip ein leeres Hunderterfeld, wie man es

auch beim Rechnen in der Grundschule verwendet. Früher war das Prozentblatt in der Hauptschule das zentrale Veranschaulichungsmittel für das Darstellen und Berechnen prozentbezogener Angaben. Heute ist das Prozentblatt aus den Schulbüchern und deshalb vermutlich auch aus dem Unterricht der Hauptschule weitgehend verschwunden, was aus didaktischer Sicht zu bedauern ist.



Deutung der Grundbegriffe des Prozentrechnens mithilfe des Prozentblattes, z. B. im Größenbereich der Geldwerte:

p %	von	G	entsprechen	P
Prozentsatz p (Anteil, Bruch)		Grundwert G (Ganzes)		Prozentwert P (Teil)
p als Zahl der Felder für den Teil P		G als Gesamtbetrag, der gleichmäßig auf 100 Felder verteilt ist		P als Teilbetrag, der auf p Felder liegt.

Lösung der Grundaufgaben der Prozentrechnung mithilfe des Prozentblattes:
(siehe die oben untersuchten Aufgabenstellungen bei den Schülern 14 bis 15)

a) 30 % von 200 € sind ________ €

Überlegung:
Auf allen 100 Feldern liegen 200 € (das Ganze). Also liegen auf einem Feld 200 € : 100 = 2 €.
Gesucht sind 30 % des Ganzen, das ist der Betrag, der auf 30 Feldern liegt. 30 · 2 € = 60 € liefert das Ergebnis.

b) ________ % von 500 € sind 10 €.

Überlegung:
Auf allen 100 Feldern liegen 500 € (das Ganze). Also liegen auf einem Feld 500 € : 100 = 5 €. Der gegebene Teilbetrag P = 10 € liegt dann auf 2 Feldern. Also gilt p = 2.

c) 20 % von ________ € sind 80 €.

Überlegung:
Auf 20 Feldern (p = 20) liegt der Betrag 80 €. Also liegen auf einem Feld 80 € : 20 = 4 €. Also liegen auf allen 100 Feldern 100 · 4 € = 400 €.

Didaktische Möglichkeiten/Vorteile des Prozentblattes:

- Das Arbeiten mit dem Prozentblatt kann und muss gedanklich strukturiert und durchdrungen werden. Es baut Einsicht und Verständnis auf und verwendet diese auch wieder im Prozess der Anwendung. Es arbeitet daher einer gedankenlosen Mechanisierung entgegen.
- Das Arbeiten mit dem Prozentblatt ist hervorragend kompatibel mit dem Dreisatzverfahren. Das Prozentblatt kann das Dreisatzverfahren effektiv ergänzen und unterstützen. Es ist aber auch als eigenständiges Darstellungs- und Veranschaulichungsmittel verwendbar, bei dem zwar implizit Dreisatzdenken im Spiel ist, dieses muss aber nicht explizit in formalisierte Notationen umgesetzt werden.
- Somit ist für den Einsatz des Prozentblattes jede der drei folgenden Möglichkeiten gut praktikabel:
  - in Verbindung mit dem schriftlichen Normalverfahren des Dreisatzes,
  - in Verbindung mit verschiedenen individuell geprägten halbschriftlichen Notationen,
  - schließlich auch mündlich bzw. im Kopf, wie es in der oben analysierten Aufgabe verlangt ist.
- Alle drei Grundaufgaben der Prozentrechnung sind durch eine einheitliche gedankliche Deutung zugänglich und lösbar.
- Das Arbeiten mit dem Prozentblatt kann auf jeder der drei für Mathematiklernen wesentlichen Abstraktions- bzw. Repräsentationsstufen realisiert werden,
  - auf der konkret-enaktiven Stufe der Handlungen durch Legen von Steinen/Marken/Spielgeld in einem großen Prozentblatt bzw. -brett;
  - auf der bildhaft-ikonischen Stufe des Zeichnens von Punkten im Prozentblatt;
  - auf der symbolischen Stufe des Notierens von Zahlen im Prozentblatt (Gliederung des Lernprozesses nach dem Muster Handlung – Zeichnung – symbolische Notation).
- Ein verständiger Umgang mit dem Prozentblatt ist bei den Schülern in der Regel nicht ad hoc gegeben. Er muss langfristig entwickelt und aufgebaut und immer wieder geübt werden, wie andere Dinge des Lernens auch. Das für jeden Schüler eigens verfügbare Prozentblatt kann zu einem ständigen Begleiter beim Prozentrechnen werden, auf den der Schüler bei Bedarf jederzeit zurückgreifen kann.
- Bisherige Versuche in Hauptschulklassen, das Prozentblatt beim Prozentrechnen langfristig im oben genannten Sinn zu verwenden, waren Erfolg versprechend und deuten auf erkennbare Verbesserungen hin.
- Als Varianten des Prozentblattes sind denkbar die sogenannte Rechenmaschine (Hunderterrahmen), bei der 100 Kugeln in »10 × 10«-Anordnung auf Stäben geschoben werden können und auch der Prozentstreifen, bei dem die 100 Felder in linearer Anordnung im Sinne des Zahlenstrahls fixiert sind.

Erzeugen von Rechensätzen mithilfe von Proportionalitätstabellen (»ganzheitliches Proportionalitätsdenken«)

Üblicherweise wird im Unterricht nach der Erarbeitung der Grundbegriffe der Prozentrechnung sofort damit begonnen, die Grundaufgaben der Prozentrechnung mithilfe des Dreisatzverfahrens zu lösen. Man bezeichnet diese Vorgehensweise traditionellerweise als »Schlussrechnen« (aus zwei gegebenen der drei Größen G, P, p wird durch »Schließen« die fehlende dritte Größe berechnet).

In der vorliegenden Arbeit wird für eine andere Vorgehensweise plädiert: Ausgehend von einfachen, jederzeit verfügbaren und abrufbaren Basissätzen, bei denen alle drei Größen gegeben sind (z. B. »1 % von 100 € sind 1 €«), werden weitere Sätze erzeugt, die aus den Basissätzen durch proportionale Veränderung einer Größe entstehen, wobei die Veränderung auf eine andere Größe adäquat übertragen werden muss (»ganzheitliches Proportionalitätsdenken« nach dem Motto »Aus Basissätzen weitere richtige Sätze erzeugen«). Operatorpfeile können die Überlegungen unterstützen (z. B. für Ausgangsveränderung, für Folgeveränderung). Eine Größe → wird dabei konstant gehalten (siehe im Download-Bereich unter der Nummer 4).

Zusammenfassende Vorschläge zum Prozentrechnen:

- Nicht zu schnell und ausschließlich rechnerische Fertigkeiten anstreben, bei denen aus zwei gegebenen Größen eine dritte Größe berechnet werden soll,
- stattdessen mehr Arbeiten und Denken
  - im Prozentblatt: Deuten der drei Größen im Prozentblatt!
  - in Proportionalitätstabellen: Drei Größen sind gegeben (Rechensatz)! Was kann man damit machen?
  - Erzeugen von weiteren Rechensätzen, auch mit Hilfe des Prozentblatts! (Ganzheitliches Proportionalitätsdenken)
- Prozentblatt und Proportionalitätstabellen als durchgängige Arbeits-, Strukturierungs- und Lösungsmittel nutzen!

3. Diskussion

3.1 Ausgewählte Befunde

Heterogenität

In Bayern wird bereits nach der vierten Jahrgangsstufe eine strikte Sortierung der Schülerinnen und Schüler nach den Schulformen Hauptschule, Realschule und

Gymnasium vorgenommen. Es ist allerdings eine Illusion zu glauben, dass dadurch homogene Lerngruppen erzeugt werden. Zwar sind die Leistungsunterschiede zwischen den Schulformen unübersehbar groß und deutlich. Aber: Die Schulleistungen von Schülern unterschiedlicher Schulformen überlappen sehr stark und innerhalb jeder Schulform sind sie sehr heterogen. Dies gilt auch und insbesondere für das Schulfach Mathematik. »Es gibt in Deutschland ca. 20 Prozent Hauptschülerinnen und -schüler, die mehr in Mathematik leisten als 38 Prozent aller Realschülerinnen und -schüler, mehr können als 61 % aller Gesamtschülerinnen und -schüler und auch besser sind als 5 Prozent aller Gymnasiasten« (Wynands 2005, S. 47).

Die Ergebnisse in den bayerischen Jahrgangsstufentests für die Hauptschule im Fach Mathematik zeigen, dass die Unterschiede zwischen verschiedenen Schülerinnen und Schülern, verschiedenen Klassen, verschiedenen Schulen enorm sind. Die folgende Übersicht enthält die Klassendurchschnittsnoten des Tests 2004 für die achte Jahrgangsstufe, aus dem die Aufgaben und Schülerbearbeitungen der Abschnitt 2.1 bis 2.3 entnommen sind.

Jahrgangsstufentest 2004 (Jahrgangsstufe 8)	R-Klasse (Hauptschulabschluss)	M-Klasse (Abschluss Mittlere Reife)
Bayerischer Gesamtschnitt	3,95	2,67
Bester Schulschnitt	2,0	1,39
Schlechtester Schulschnitt	5,59	4,15

Die Zahlen sprechen für sich und belegen eine stark ausgeprägte Heterogenität mathematischer Schulleistungen innerhalb der Hauptschule.

Etwa 20 Prozent der Schülerinnen und Schüler erzielten in diesem Test die Note 1 oder 2 (leistungsstarke Schüler), etwa 30 Prozent der Schüler die Note 5 oder 6 (leistungsschwache Schüler). Es gilt: Die homogene Lerngruppe ist offensichtlich auch innerhalb der Schulform Hauptschule eine Fiktion.

Leistungsschwache Schüler/Rechenschwäche

Bei allen empirischen Großuntersuchungen zu mathematischen Leistungen wird die Existenz einer Risikogruppe von leistungsschwachen Schülern konstatiert, die je nach den Kriterien bzw. Maßstäben 15 bis 40 Prozent eines Schülerjahrgangs ausmacht (siehe etwa Blum 2004). Sie gehören zu verschiedenen Schularten, gehäuft und massiv zum Bereich der Hauptschule. Im Jahrgangsstufentest 2004 für die achte Klasse der Hauptschule wird die Existenz dieser Schülergruppe sichtbar. Obwohl sich die Aufgaben dieses Tests auf einen curricularen Kern- und Basisbereich beschränken (siehe die Aufgaben A, B, C in den Abschnitten 2.1 bis 2.3), erhalten 30 Prozent der Schülerinnen und Schüler nur die Note 5 oder 6 (siehe oben). Vermutlich hängt diese Tatsache eng mit dem Phänomen der Rechenschwäche zusammen, mit dem man üblicherweise gravierende Schwierigkeiten im rechnerischen Umgang mit natürlichen Zahlen in der Grundschule beschreibt. Dabei geht man etwa von folgenden Zahlen aus: Etwa 15 Prozent eines Schülerjahrgangs haben markante Schwierigkeiten beim Rechnen, davon ca. 5 Prozent so gravierend, dass sie eine Förderschule besuchen. Die etwa 10 Prozent verbleibenden rechenschwachen Schülerinnen und Schüler in der Grundschule werden aller Voraussicht nach die Hauptschule besuchen, in der in Bayern etwa ein Drittel eines Jahrgangs unterrichtet wird. Der Anteil rechenschwacher Schülerinnen und Schüler in der bayerischen Hauptschule ist daher mit ungefähr 30 Prozent anzusetzen ($0{,}10 : \frac{1}{3} = 0{,}3 = 30\ \%$). Damit ist kein stichhaltiger Beweis erbracht, dass die beiden durch verschiedene Methoden diagnostizierten Gruppen der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler und der rechenschwachen Schülerinnen und Schüler in der Hauptschule identisch sind. Eine weitgehende Übereinstimmung der beiden Gruppen ist aber in hohem Maße plausibel. Dies sollte als Plädoyer verstanden werden, die Untersuchung des Phänomens der Rechenschwäche, die bisher meist im Bereich der Grundschule erfolgt, stärker als bisher auf den Bereich der Hauptschule zu erweitern.

In Bayern verschärft sich diese Situation durch die Tatsache, dass am Ende der neunten Klasse der Hauptschule in einigen Kernfächern, darunter natürlich auch Mathematik, eine zentrale Prüfung stattfindet, nach deren erfolgreichem Bestehen den Schülerinnen und Schülern ein sogenannter qualifizierender Hauptschulabschluss bestätigt wird. Die Mathematikaufgaben dieser Abschlussprüfung sind auf ein eng segmentiertes Profil im oberen Leistungsbereich fixiert. Der Schwierigkeits- bzw. Komplexitätsgrad ist hoch, so hoch, dass er für die leistungsschwachen/rechenschwachen Schülerinnen und Schüler unerreichbar ist. Man kann den Sachverhalt auch so ausdrücken: Weil alle Schülerinnen und Schüler alles lernen sollen, was durch Curriculum und Abschlussprüfungen an Leistungsstandards vorgeschrieben ist, gibt es – vermutlich in allen Schularten – viele Schülerinnen und Schüler, welche kaum etwas richtig bzw. gründlich lernen. Es kommt hinzu, dass vor zentralen Abschlussprüfungen jeweils eine intensive Vorbereitung stattfindet, die im Falle der Hauptschule im Prinzip die beiden letzten Schuljahre umfassen kann. Die Chancen- und Erfolglosigkeit der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler überträgt sich damit auf die gesamte lange Vorbereitungszeit. Eine gezielte Förderung leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler findet hier kaum noch statt. Fehlende Erfolgserfahrungen führen bei diesen Schülern zu großen Motivationsproblemen, Selbstkonzeptdefiziten und Sinnkrisen. Die Förderung leistungsschwacher/rechenschwacher Schülerinnen und Schüler ohne Vernachlässigung des oberen Leistungsbereichs ist daher eine zentrale pädagogisch-didaktische Herausforderung.

Befunde zu Schülerschwierigkeiten und -fehlern

(siehe im Download-Bereich Nr. 5)

3.2 Aspekte der Förderung

Themenbezogene Förderaktivitäten

Es gibt in der didaktischen Literatur einen reichhaltigen Fundus von Vorschlägen, Anregungen und Übungsformaten für ein verständnis- und kompetenzorientiertes Arbeiten zu den einzelnen Lehrplanthemen, die auch in einem möglichen Förderunterricht gewinnbringend eingesetzt werden können. Für den Bereich des Bruchrechnens sei zum Beispiel verwiesen auf Bauer 2008a; 2008b; Besuden 1998; Besuden 2004; Kraus 2002; Wellenreuther 1994; 1996 und Wittmann 2007.

Konzepte für die Förderung

Erich Ch. Wittmann diskutiert Konzepte für die Förderung rechenschwacher (Grund)schülerinnen und -schüler (siehe Wittmann 2001). Die Argumentation kann im Wesentlichen auf die Situation leistungsschwacher/rechenschwacher Schülerinnen und Schüler in der Hauptschule übertragen werden. Wittmann unterscheidet:

A Differentialdiagnostischer Ansatz: Dabei wird versucht, tiefer liegende kognitiv-emotional-soziale Ursachen für Rechenschwäche aufzudecken und darauf bezogene Therapievorschläge zur Kompensation der identifizierten Defizite zu entwickeln.

B Ansatz des kleinschrittig-reproduktiven Übens: Dieser Ansatz konzentriert sich auf mathematische Routinefertigkeiten, die unter Verzicht auf verständnisorientierte Maßnahmen und auf höhere mathematische Fähigkeiten vor allem durch automatisierend-mechanisierende Übungsformate gesichert werden sollen.

Wittmann kritisiert beide Ansätze, zeigt ihre theoretischen und praktischen Unzulänglichkeiten auf und fordert:

C »Alternativer«/ökologisch-systemischer Ansatz: Er ist charakterisiert durch eine »unauffällige« Förderung leistungsschwacher Schüler mithilfe guter, unspezifischer Lernangebote im normalen, gemeinsamen Unterricht, der auf der Basis eines aktiv-entdeckenden Lernens auf eine allgemeine Stärkung der mathematischen Kompetenz abzielt.

Die Argumentation für einen solchen ökologisch-systemischen, aktiv-entdeckenden Ansatz ist überzeugend und durch vielfältige Befunde zum mathematischen Lernprozess gestützt. Die Untersuchungen in Abschnitt 2 mahnen dennoch zu Skepsis bzw. Kritik. Offensichtlich ist die Existenz einer großen Gruppe leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht der Hauptschule, die noch in höheren Jahrgangsstufen gravierende Schwierigkeiten und Defizite bezüglich einfacher, fundamentaler mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten haben, ein Faktum. Es ist nicht realistisch, anzunehmen, dass solche mehrere Schuljahre zurückreichende Defizite allein durch eine »unauffällige Förderung im normalen gemeinsamen Unterricht« aufgefangen und behoben werken können. Für viele leistungsschwache Schüler im Mathematikunterricht der Hauptschule ist eine zusätzliche spezielle Förderung, die über den normalen Unterricht hinausgeht, unverzichtbar. Es scheint daher nötig, eine Erweiterung der Ansätze in folgender Weise zu fordern:

D Förderdidaktischer Ansatz: Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler sollten grundsätzlich in ihrem Klassenverband bleiben und im normalen, gemeinsamen differenzierend angelegten Unterricht hinsichtlich allgemeiner und spezieller mathematischer Kompetenzen gefördert werden. Zusätzlich sollten in speziellen Förderkursen für leistungsschwache Schüler grundlegende Defizite behoben und vorhandene Kompetenzen weiterentwickelt werden.

Aus pädagogischen Gründen ist es dabei unerlässlich, für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler zeitweise oder auch ganz individuell definierte, eventuell niedrigere Leistungsstandards zuzulassen (Einschränkung des Stoffumfangs; verschiedene Leistungsniveaus).

Mathematikdidaktische Grundpositionen

An welchen Grundpositionen soll ein mathematischer Förderunterricht ausgerichtet werden: Engführung oder Öffnung, Routine oder Einsicht, Instruktion oder Konstruktion, behavioristisch-passivistischer Ansatz oder konstruktivistisch-aktivistischer Ansatz? Im »Streit« zwischen den beiden didaktisch-methodischen Grundpositionen gibt es je nach theoretischem Standpunkt bzw. empirisch-unterrichtspraktischen Erfahrungen verschiedene Argumentationen für eine Position sowie kritische Einwände gegen die jeweils andere Position.

Die praktizierenden Lehrer vertrauen häufig eher auf ein Vorgehen nach traditionellem Muster, gekennzeichnet etwa durch Lehrerdominanz, Instruktion, Schwierigkeitsisolierung, Kleinschrittigkeit und Strukturierung. Hier sollte man den ermunternden Rat geben: Mehr Offenheit wagen, insbesondere mehr Offenheit im Sinne der »These des Fehlerparadoxons« (siehe Weingardt 2004):

> »In komplex-dynamischen Strukturen lässt sich der Kardinalfehler, ein nachhaltig verfolgtes Interesse nicht zu erreichen, am ehesten vermeiden, wenn Fehleroffenheit hergestellt wird: Fehlervermeidung in der Zieldimension wird nur durch Fehleroffenheit auf dem Weg zum Ziel möglich« (a. a. O., S. 254).

In der didaktischen Literatur betont und verlangt man dagegen einen Unterricht im Sinne des konstruktivistisch-aktivistischen Ansatzes, gekennzeichnet durch Schülerorientierung, Konstruktion, Eigenproduktion, Ganzheitlichkeit und Offenheit. Hier sollte man zu bedenken geben, dass Weinert und Helmke in ihrer Scholastik-Studie mit 54 Grundschulklassen über vier Jahre bei den sechs besten Klassen »überhaupt nur ein einziges Merkmal ... [gefunden haben], bei dem alle erfolgreichen Klassen einen überdurchschnittlichen Wert aufweisen, nämlich die (aus Schülersicht erhobene) Klarheit der Lehreräußerungen ... Offenbar haben das Lehrervorbild und die damit verbundene Prägung der Klassenzimmerkultur unverändert eine Schlüsselfunktion« (Bauersfeld 2003, S. 445, 446).

Unverzichtbar mit Blick auf beide Grundpositionen sind wohl:

- anregende Lernumgebungen für die Schülerinnen und Schüler;
- wirksame Instruktionen und Strukturierungen der Lehrerin bzw. des Lehrers;
- kognitive Aktivitäten bzw. Aktivierungen der Schülerinnen und Schüler;
- intensive soziale Austauschprozesse beim Lernen (Kommunikation).

Fördermaßnahmen bzw. Prinzipien – eine Übersicht
(siehe dazu im Download-Bereich Nr. 6)

4. Ausblick

Diagnose und Förderung mathematischer Kompetenzen von – insbesondere leistungsschwachen – Schülerinnen und Schülern, ist ein vielschichtiges, komplexes Aufgabenfeld, so vielschichtig und komplex, dass die Hoffnung auf einen »sicheren theoretischen Heimathafen« (Hentig 1977, S. 513) aufgegeben werden muss. Eine einheitliche mathematikdidaktische Theorie, in der alle Phänomene beschrieben und alle Probleme gelöst sind oder werden, ist nicht in Sicht, ebenso wenig eine Konvergenz praktischer Erfahrungen und theoretischen Wissens in Richtung auf einen finalen, vollständigen Durchblick. Es ist vielmehr erforderlich, mit einer Mehrzahl erklärender Ansätze und Beschreibungssysteme umzugehen, die jeweils Teilaspekte des Lehrens und Lernens von Mathematik erfassen (vgl. mit Bauersfeld 1977; 1988).

In diesem Sinn wird hier ein pluralistischer Ansatz mit behavioristisch-passivistischen und konstruktivistisch-aktivistischen Elementen vertreten, nicht im Sinne einer harmonisierenden Verschmelzung, sondern eher im Sinne eines spannungsvollen Nebeneinanderstehens konkurrierender Positionen. Entscheidungen in der Unterrichtspraxis sollten nicht alternativ-ausschließend und auch nicht absolut und allgemeingültig getroffen werden. Sie sollten vielmehr pragmatisch-undogmatisch erfolgen, das heißt themen- und situationsspezifisch, von Fall zu Fall. Es gilt, eine sinnvolle Balance zu finden zwischen dem didaktisch Wünschbaren und dem praktisch Möglichen (siehe Hefendehl-Hebeker 2004).

Literatur

Altrichter, H. (2002): Strategien zur Förderung professionellen Lernens von Lehrerinnen und Lehrern. In: In: Peschek, W. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 7–14.

Bauer, L. (2001): Texte von Hauptschülern zu Mathematikaufgaben und ihren Lösungen. In: mathematica didactica, Band 1, S. 3–30.

Bauer, L. (2002): Aus Fehlern lernen! Überlegungen zu Lernschwierigkeiten und Fehlern im Mathematikunterricht der Hauptschule. In: Schubert, A. (Hrsg.): Mathematik lehren wie Kinder lernen. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag, S. 58–78.

Bauer, L. (2005): Fördern und Fordern. Anregungen zum Verstehen der senkrecht-Beziehung. In: Mathematiklehren, 131, S. 9–13.

Bauer, L. (2006): Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule. Überlegungen zum zentralen Jahrgangsstufentest 2004 für bayerische Hauptschulen (Jahrgangsstufe 8). In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Hildesheim/Berlin: Franzbecker, S. 111–114.

Bauer, L. (2008a): Wie übt man Bruchrechnen? Hinweise und Empfehlungen für eine effektive Übungspraxis. In: Lernchancen, 61/62, S. 16–23.

Bauer, L. (2008b): Bruchgarderobe, Zauberquadrat und Co. Anregungen für spielerische Übungsformen und Materialien. In: Lernchancen, 61/62, S. 24–27.

Bauersfeld, H. (1977) (Hrsg.): Forschung zum Prozeß des Mathematiklernens. Schriftenreihe des IDM, Band 10. Bielefeld.

Bauersfeld, H. (1988): Quo vadis Fachdidaktik? Zu den Perspektiven der Fachdidaktik. In: mathematica didacta, 2, S. 3–24.

Bauersfeld, H. (2003): Kommentar: Probleme und Chancen der Förderung arithmetisch-mathematischen Wissens: In: Fritz A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hrsg.): Rechenschwäche. Weinheim/Basel: Beltz, S. 444–449.

Becker, G./Horstkemper, M./Risse, E./Stäudel, L./Wernig, R./Winter, F. (Hrsg.) (2006): Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken – Können entwickeln. Friedrich Jahresheft.

Berger, R. (1989): Prozent- und Zinsrechnen in der Hauptschule. Regensburg: Roderer.

Besuden, H. (1998): Arbeitsmappe. Verwendung von Arbeitsmitteln für die anschauliche Bruchrechnung. Osnabrück: Selbstverlag.

Besuden, H. (2004): Bruchbegriff und Bruchrechnen – erlernt an Materialien und in Stationen. In: Mathematik lehren, 122, S. 15–19.

Binneberg, K. (2006): Plädoyer für eine pädagogische Kasuistik. In: Pädagogische Rundschau, 4, S. 347–358.

Blum, W./Neubrand, M./Ehmke, T./Senkbeil, M./Jordan, A./Ulfig, F./Carstensen, C. (2004): Mathematische Kompetenz. In: Prenzel, M./Baumert, J./Blum, W./Lehmann, R./Leutner, D./Neubrand, M./Pekrun, R./Rost, J./Schiefele, U./PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.): PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster: Waxmann 2004, S. 47–92.

Born, A./Oehler, C. (2005): Kinder mit Rechenschwäche erfolgreich fördern. Stuttgart: Kohlhammer.

Ellrott, D./Aps-Ellrott, B. (1995): Förderdidaktik – Mathematik Primarstufe. Offenburg: Mildenberger.

Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hrsg.) (2003): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim/Basel: Beltz.

Ganser, B./Schindler, M. (Hrsg.) (2005): Rechenschwäche überwinden. Band 1 und 2. Donauwörth: Auer.

Gerlach, M./Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (2007): Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Gerster, H. D. (1982): Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren. Freiburg: Herder.
Grissemann, H./Weber, A. (2000): Grundlagen und Praxis der Dyskalkulietherapie. Bern: Huber.
Hefendehl-Hebeker, L. (2004): Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften In: GDM-Mitteilungen, 78, S. 94–98.
Herden, G./Pallack, A. (2000): Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlstrategien in der Bruchrechnung. Empirische Erhebung über 244 SchülerInnen der Klassen sieben von Gymnasien. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 3/4, S. 259–279.
Jost, D./Erni, J./Schmassmann, M. (1992): Mit Fehlern muss gerechnet werden. Zürich: Sabe.
Kraus, H. (2002): Bruchrechnen im Unterricht. Lernsequenzen im Unterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Krüll, K. E. (1994): Rechenschwäche – was tun? München: Reinhardt.
Lorenz, J. H./Radatz, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel.
Lorenz, J. H. (Hrsg.) (1984): Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis. Köln: Aulis Deubner.
Lorenz, J. H. (Hrsg.) (1991): Störungen beim Mathematiklernen. Köln: Aulis Deubner.
Lorenz, J. H. (1987): Lernschwierigkeiten und Einzelfallhilfe. Göttingen: Hogrefe.
Lorenz, J. H. (2003): Lernschwache Rechner fördern. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Milz, J. (1993): Rechenschwächen erkennen und behandeln. Teilleistungsstörungen im mathematischen Denken. Dortmund: Borgmann.
Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg/Berlin: Spektrum.
Pallack, A. (2002): Nachhilfelehrer Computer. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
Radatz, H. (1980): Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.
Schilling, S./Prochinig T. (1990): Dyskalkulie, Rechenschwäche. Winterthur: Schubi-Lehrmittel.
Schipper, W. (2002): Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. In: Journal für Mathematikdidaktik, 3/4, S. 243–261.
Schlaak, G. (1968): Fehler im Rechenunterricht. Hannover: Schroedel.
Schulz, A. (1994): Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Paetec.
Selter, C./Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Stuttgart: Klett.
Sommer, N. (2004): Welchen Nutzen kann die Einzelschule aus den Ergebnissen und Instrumenten der »großen Vergleichsuntersuchungen« ziehen? In: Journal für Mathematikdidaktik, 3/4, S. 269–293.
Sundermann, B./Selter, C. (2006): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.
von Hentig, H. (1977): Erkennen durch Handeln. In: Die Deutsche Schule, 9, S. 495–515.
vom Hofe, R. (2003): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg u. a.: Spektrum Akademischer Verlag.
Weinert, F. E./Helmke, A. (1997): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Psychologie Verlagsunion.
Weinert, F. E. (1998): Neue Unterichtskonzepte zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.): Wissen und Werte für die Welt von morgen. Donauwörth: Auer, S. 101–125.
Weingardt, M. (2004): Transdisziplinäre Grundlagen zur Theorie und Produktivität des Fehlers in Schule und Arbeitswelt. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
Wellenreuther, M. (1994, 1996): Bruchrechnung 1, 2. Reihe Stützpfeiler. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Wittmann, E. C. (2001): Ein alternativer Ansatz zur Förderung »rechenschwacher« Kinder. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 660–663.
Wittmann, G. (2007): Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. In: Mathematik lehren, 142, S. 17–23.
Wynands, A. (2005): Sehen, verstehen und begründen – Muster, Zahlen und Terme. In: Mathematik lehren, 128, S. 47–51.

Margret Schmassmann

»Geht das hier ewig weiter?«

Dezimalbrüche, Größen, Runden und der Stellenwert

»Geht das hier ewig weiter?«, fragt Tina, eine Schülerin im fünften Schuljahr, und zeigt auf die Stellen rechts vom Komma. Diese Aussicht ist für Tina gar nicht erfreulich, zumal sie schon mit den Stellen links vom Komma genug Schwierigkeiten hat.

Warum gerade die Bereiche »Dezimalbrüche, Größen und Runden« vielen Schülerinnen und Schülern große Schwierigkeiten verursachen und wie sich diese äußern, wird in den Abschnitten 1 »Schwierigkeiten aus der Sache heraus« und 2 »Schwierigkeiten aufgrund mangelnder Vorkenntnisse – Basisstoff« nachgegangen. In Abschnitt 3 »Förderhinweise« werden grundsätzliche Überlegungen zur Förderung durch fachliche Vernetzung angestellt und konkrete Anregungen gegeben, wie das Erarbeiten der Themenbereiche »Dezimalbrüche, Größen und Runden« in Verbindung mit dem Aufarbeiten fehlender Vorkenntnisse gestaltet werden kann. »Stellenwert« wird nicht als eigenes Thema abgehandelt, sondern als verbindendes Element immer wieder in die Bereiche »Dezimalbrüche, Größen und Runden« eingeflochten.

1. Schwierigkeiten aus der Sache heraus

Viele Schwierigkeiten mit Dezimalbrüchen, Größen und mit dem Runden liegen daran, dass Denkgewohnheiten, die im Umgang mit natürlichen oder ganzen Zahlen funktioniert haben, nicht eins zu eins in den Zahlenraum der rationalen Zahlen übernommen werden können (vgl. Tabelle 1). Die Erweiterung des Zahlenraums erfordert auch eine Erweiterung der bisherigen Denkgewohnheiten. Bisherige und erweiterte Denkgewohnheiten sowie Schwierigkeiten und Fehler, die auftreten können, wenn diese Erweiterung nicht gelingt, können der Tabelle 1 entnommen werden.

Lehrpersonen müssen sich bei der Fehleranalyse und der Leistungsbeurteilung bewusst sein, dass die Erweiterung der Denkgewohnheiten nicht von heute auf morgen gelingt, sondern viel Zeit und Geduld benötigt. Rückfälle sind jederzeit möglich, insbesondere, wenn sich die Schülerinnen und Schüler noch an Rezepte klammern, die sie in der Grundschule mit Erfolg eingesetzt haben.

Rückblick und Ausblick: In den ersten vier Schuljahren haben sich Schülerinnen und Schüler an eine bestimmte Denkweise gewöhnt und sich zuweilen auch mit Rezepten über Wasser gehalten, wie zum Beispiel »Nullen anhängen« oder »Nul-