

*Heft 1: Horst Bartnitzky / Hans Brügelmann:
Fördern – warum, wer, wie, wann?
mit CD mit Material zu allen vier Heften*

*Heft 2: Maresi Lassek / Stefanie Wolters:
Basiskompetenzen fördern im Übergang Kindertagesstätte – Schuleingangsstufe*

*Heft 3: Horst Bartnitzky unter Mitarbeit von Angelika Gadow und Ulrich Hecker:
Fördern im Deutschunterricht*

Heft 4

Uta Häsel-Weide / Marcus Nührenbörger

Fördern im Mathematikunterricht

Inhalt

Förderkonzept Mathematik	
Individuell heißt nicht vereinzelt	6
Begründungen für ausgewählte Kompetenz-Schwerpunkte	7
Unterrichtsintegrierte Förderung	9
Aufgabenformate und Lernumgebungen	10
Auswahl geeigneter mathematischer Aufgaben	10
Aufgaben der Lehrkraft	11
Kritische Stellen und Möglichkeiten der Förderung	
Zahlvorstellungen	16
Operationsvorstellungen	29
Zahlenrechnen	37
Fazit	45

Zusätzlich auf CD:

Fachtexte und PowerPoint-Präsentation

(Eine Auflistung aller Materialien steht in Heft 1, S. 56)

© 2012 Grundschulverband
Frankfurt am Main

Satz und Gestaltung: novuprint · Agentur für Mediendesign,
Werbung, Publikationen GmbH, 30161 Hannover

Bildnachweis: Die Rechte liegen bei den Autoren,
soweit nicht anders angegeben

Druck und Bindung: Beltz Druckpartner, 69502 Hemsbach
ISBN-Nr. 978-3-941649-05-7 / Best.-Nr. 1092
(Beiträge zur Reform der Grundschule, Band 134)

Förderkonzept Mathematik

Individuell heißt nicht vereinzelt

Im Mathematikunterricht wird »individuelle Förderung« oftmals gleich gesetzt mit einer auf das einzelne Kind bezogenen, isolierten Bearbeitung von nach Schwierigkeitsgraden gestuften Rechenaufgaben bzw. Lernheften. Wenn in diesem Kontext ein Kind Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigt, wird ihm häufig mehr Zeit für die Bearbeitung von Aufgaben zugesprochen. Hingegen wird eine inhaltlich spezifischere, das System des Mathematikunterrichts reflektierende und das einzelne Kind stärker in den Blick nehmende Förderung im regulären Unterricht kaum explizit aufgegriffen. Individuelle Förderung von Lernschwierigkeiten wird zudem eher in den Förderunterricht verschoben. Indes, auch im »exklusiven Förderunterricht« scheinen die Lehrkräfte nicht dazu zu neigen, mathematische Lehr- und Lernangebote an das Denken des einzelnen Kindes anzupassen, sondern vielmehr »erwartungswidrige Äußerungen und Handlungen als fehlerhaft anzusehen, sie bewertend zu kommentieren und im »Bedarfsfall zu korrigieren« (Sundermann/Selter 2006a, S. 6). Auch Wielpütz (2010, S. 111) folgert im Zuge seiner Befunde aus zahlreichen Qualitätsanalysen an Schulen: »Viele Schulen verorten »individuelle Förderung« (die sich zumeist an leistungsschwächere Kinder richtet) in Maßnahmen außerhalb des Regelunterrichts. Der beobachtbare Förderunterricht wiederholt jedoch, auch in Kleinstgruppen, mit weiteren Aufgaben jenen Unterricht, der bereits wenig erfolgreich war. Der Modus der »Beschäftigung« lässt einen verstehenden Zugang zu Schwierigkeiten und ihren möglichen Ursachen außer Acht. Die Frage der Passung stellt sich auf diese Weise gar nicht.«

Um eine Passung zwischen dem Kind und der Mathematik zu erzielen, orientieren sich beispielsweise individuelle Trainingskonzepte zur Förderung sukzessiver Lernfortschritte an möglichen »Stufentheorien« der Entwicklung: »Dem Förderkonzept [muss] eine Theorie zugrunde liegen, die die Stufen der Entwicklung im jeweiligen Gegenstandsbereich beschreibt. Erst so kann bestimmt werden, welche Aufgaben in welcher Folge bearbeitet werden sollen und welche Erkenntnisse und Konzepte erarbeitet werden müssen, um insgesamt in der Entwicklung voranzukommen. Ohne eine solche Theorie können zwar Leistungsrückstände und -defizite bestimmt werden, es können aber nicht die nächsten Förderziele im Sinne der Stufe der nächsten Entwicklung festgelegt werden« (Fritz/Ricken 2009, S. 374).

Mit der Frage der Passung weist Wielpütz (2010) zugleich aber auf die zielgerichtete Anregung individueller Lernprozesse im regulären Mathematikunterricht hin und damit auf die Passung zwischen den mathematischen Kompetenzen des zu fördernden Kindes und den vom Fach intendierten Kompetenzen. Insofern ist die Perspektive des Faches, die Entwicklungsmöglichkeiten in unterschiedlichen Gegenstandsbereichen beschreibt, in Relation zu konstruktiven Gestaltungsmöglichkeiten von reichhaltigen Aufgabenformaten und zum im Unterricht sich artikulierenden und denkenden Individuum zu setzen. Denn jeglicher Mathematikunterricht sollte von den unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Kinder ausgehen und diese zugleich mit Blick auf die verbindli-

chen Anforderungen fördern. Mit anderen Worten: Im alltäglichen Mathematikunterricht sollten Kinder individuell in der Begegnung mit den Mitschülerinnen und -schülern gefördert werden, auch wenn sie Schwierigkeiten beim Erwerb von Mathematik zeigen. Die konkrete Realisierung einer unterrichtsintegrierten Förderung zielt somit darauf, dass Kinder mit Lernschwierigkeiten den Alltag des Mathematikunterrichts nicht allein mit Hilfe der Kenntnis spezifischer Verfahrensregeln bewältigen, sondern vielmehr auch und gerade diese Kinder während der täglichen Auseinandersetzung mit Mathematik grundlegende mathematische Strukturen und Muster verstehen lernen.

Insofern steht im Zentrum der unterrichtsintegrierten Förderung die *beziehungsreiche* und *verstehensorientierte* Auseinandersetzung mit Mathematik. Dabei geht es darum, allen Kindern eine nachhaltige Förderung der *mathematischen* Kompetenzen zu ermöglichen. Diese Förderung sollte zugleich auf die jeweils individuellen Fähigkeiten wie auch Schwierigkeiten fokussiert sein. Mit anderen Worten, die Förderung ist *differenziert* und *diagnosegeleitet* aufzubauen. Ein weiteres Merkmal der Förderung ist dadurch gekennzeichnet, dass mathematische Aktivitäten im regulären Mathematikunterricht stets mit Bedeutungen *sozialer* und *innermathematischer* Art verknüpft sind. Demnach ist auch die Förderung danach auszurichten, dass alle Kinder ihr mathematisches Verständnis im *Austausch* mit anderen Kindern und der Lehrerin artikulieren sowie weiter entwickeln können (vgl. Nührenböger 2010a).

Begründungen für ausgewählte Kompetenz-Schwerpunkte

In Folge (inter-)nationaler Vergleichsstudien etabliert sich in der mathematikdidaktischen Diskussion um die Förderung von Kindern die differenzierte Beschreibung mathematischer Kompetenzen, deren Erwerb sowie deren Erfassung und Anregung mittels geeigneter Aufgabenstellungen. Mit Blick auf das von Winter (1995) formulierte Konzept mathematischer Grundbildung werden in den Bildungsstandards allgemeine von inhaltlichen mathematischen Kompetenzen unterschieden (vgl. Walther/Selter/Neubrand 2007). Unter Kompetenz werden hierbei Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Kinder verstanden, die diese zum einen in ausgewählten inhaltlichen Bereichen (Zahl und Operation, Form und Veränderung, Muster und Strukturen, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit) zeigen. Zum anderen sind diese inhaltsbezogenen Kompetenzen mit spezifischen prozessualen Aktivitäten der Kinder verknüpft (Kommunizieren, Darstellen, Argumentieren, Modellieren, Problemlösen) (s. Abb. 1).

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Umgang mit Zahl und Operationen	Kommunizieren
Umgang mit Raum und Form	Darstellen
Muster und Strukturen	Argumentieren
Messen und Umgang mit Größen	Problemlösen
Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit	Modellieren

Abb. 1: Inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen in der Grundschule

Die Verbindung von Inhalt und Prozess betont die Bedeutung des Verstehens mathematischer Inhalte nicht als Regelwerk, sondern als »Wissenschaft von den Mustern und Strukturen«. In diesem Sinne verweisen die Bildungsstandards auf einen Wandel von der primären Vermittlung von Rechentechniken hin zu einer Beachtung mathematischer Grundbildung: »Die mathematische Grundbildung für Schülerinnen und Schüler hängt also wesentlich davon ab, in welchem Maße im Unterricht Anlässe geschaffen werden, selbst oder gemeinsam Probleme mathematisch zu lösen, über das Verstehen und das Lösen von Aufgaben zu kommunizieren, über das Zutreffen von Vermutungen oder über mathematische Zusammenhänge zu argumentieren, Sachsituationen in der Sprache der Mathematik zu modellieren und für die Bearbeitung von Problemen geeignete Darstellungen zu ersinnen oder auszuwählen« (Walther/Selter/Neubrand 2008, S. 20).

Die Beachtung der spezifischen Kompetenzen bietet eine Ausgangsbasis für grundlegende Zugänge zur Diagnose und Förderung mathematischer Entwicklungen beim einzelnen Kind.

Im Folgenden werden wir anhand ausgewählter inhaltlicher Bereiche spezifische Anregungen für die Förderung mathematischer Kompetenzen thematisieren. Aber welchen Kompetenzen kommt eine zentrale Bedeutung für die mathematisch grundlegende Förderung leistungsschwächerer Kinder zu?

Lorenz (2003) oder auch Scherer und Moser Opitz (2010) weisen darauf hin, dass gerade im arithmetischen Bereich Kinder besondere Schwierigkeiten zeigen und besonderer Förderung bedürfen. Denn ihnen fehlen flexible Rechenstrategien, gut verankerte und tragfähige Vorstellungen von Zahlen und Operationen. In diesem Kontext scheint im Anfangsunterricht die Ablösung vom verfestigten Zählen – ein Hauptindikator für Rechenschwierigkeiten – in enger Beziehung zum Aufbau operativer Beziehungen zu stehen (vgl. Gaidoschik 2009; Moser Opitz 2007). Kinder, die verfestigt zählen, haben oftmals eine unzureichende Vorstellung von Rechenoperationen, strukturierten Anzahlen und eine geringe Einsicht in das dezimale Zahlssystem.

Um der Bedeutung des Bereiches »Arithmetik« nicht nur im Stoffkanon der Grundschule, sondern auch für die Entwicklung mathematischen Wissens Rechnung zu tragen, werden wir uns in diesem Beitrag auf drei ausgewählte »förder-sensible« Bereiche der inhaltsbezogenen Kompetenzen »Zahl und Operationen«, verbunden mit »Muster und Strukturen«, beschränken und diese vor allem mit den prozessbezogenen Kompetenzen »Kommunizieren, Darstellen und Argumentieren« verschränken. Diese Einschränkung dient der Präzisierung; gleichwohl sollte dem Leser bewusst sein,

- dass die weiteren Inhalte der Mathematik wie Geometrie, Größen, Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit ebenso wie die Prozesse des Problemlösens und Modellierens eine bedeutsame Rolle für der Entwicklung mathematischen Denkens und im alltäglichen Mathematikunterricht spielen und
- dass somit die skizzierten Aufgabenstellungen lediglich exemplarischen Charakter für die analoge Übertragung auf die weiteren mathematischen Gebiete besitzen.

Mit Blick auf die besonderen Charakteristika der Konstruktion mathematischen Wissens und der Schwierigkeiten von Kindern beim Erwerb von Mathematik zum Schulbeginn können zur Förderung im Anfangsunterricht drei zentrale mathematische Schwerpunkte der inhaltsbezogenen Kompetenz »Zahl und Operationen« herausgestellt werden:

- Zahlvorstellungen,
- Operationsvorstellungen
- Zahlenrechnen und flexibles Rechnen

Diese drei Kompetenzschwerpunkte werden in den weiteren Kapiteln anhand von jeweils drei Aufgabenformaten näher erläutert. Zuvor aber soll die Bedeutung der Aufgabenformate für eine unterrichtsintegrierte Förderung diskutiert werden.

Unterrichtsintegrierte Förderung

Anhand der drei förder-sensiblen Bereiche werden in diesem Band exemplarische Unterrichts Anregungen diskutiert, die eine Förderung im regulären Unterricht erlauben. Selbstverständlich können auch Förderungen im Rahmen einzelner, individualisierter Maßnahmen eine sinnvolle Begleitung darstellen. An dieser Stelle soll jedoch die zentrale Bedeutung des alltäglichen Mathematikunterrichts auch zur Förderung leistungsschwächerer Kinder herausgestellt werden.

Im Zuge der Heterogenität der kindlichen Lernvoraussetzungen, -bedürfnisse und auch -möglichkeiten erweist sich »individuelle Förderung« als eine anspruchsvolle Aufgabe, da unterschiedliche Kinder auch unterschiedlicher Anforderungen und Anreize bedürfen. Mit Blick auf eine Förderung im Fach Mathematik existieren zwar zahlreiche Vorschläge für anscheinend kindgerechte und individualisierte Fördermaßnahmen. Allerdings sollte aus zumindest zwei Gründen eine Vereinzelung der Förderung und eine Isolierung von Rechenanforderungen kritisch bedacht werden:

- Eine Förderung auf den exakten Lernstand des Kindes adaptiv auszurichten, bedarf einer differenzierten und kontinuierlichen Diagnose, die im Hinblick auf die heterogenen Lernstände und unterschiedlichen Fächer kaum zu leisten ist. Die von Lehrkräften vorbereitete individuelle Förderung kann deshalb nur schwerlich die dynamischen Lernprozesse und spezifischen Ausprägungen von Lernständen eines jeden Kindes treffen. »Es ist schwer möglich, kontinuierlich jedem einzelnen Kind seinem individuellen Lernstand angepasste Aufgaben zuzuweisen, die dessen Lernentwicklung optimal anregen« (Selter 2006, S. 133).
- Die natürliche Differenzierung bietet den Kindern hingegen Gelegenheiten, an einem mathematischen Thema auf unterschiedliche und selbstdifferenzierte Weise zu arbeiten (vgl. Krauthausen/Scherer 2010; Nührenbörger 2010b; Wittmann 2010). Das Prinzip der natürlichen Differenzierung unterscheidet sich deutlich von geläufigen Formen der Zuteilung leichter oder schwerer Aufgaben. Denn es zielt darauf, dass Kinder an einem gemeinsamen mathematischen Aufgabenkontext arbeiten. Die unterschiedlichen Schwierigkeitsgrade erwachsen aus der Auseinandersetzung mit den Aufgaben und können von den Kindern eigenständig und flexibel genutzt werden.
- Individuelle Förderung ist stets in kollektive Lernprozesse zu integrieren, um mathematisches Verständnis anzuregen. Wenn Kinder vor allem individualisiert arbeiten und gemeinsame Erarbeitungs- und Reflexionsphasen in den Hintergrund rücken, finden Diskurse über verschiedene, ähnliche oder aber auch konträre Lösungswege und Sichtweisen kaum noch statt. Aber diese sind von zentraler Bedeutung für die Entwicklung mathematischen Wissens und für die allmähliche Entwicklung mathematischen Argumentierens (vgl. Nührenbörger/Schwarzkopf 2010; Steinbring 2000).

Aufgabenformate und Lernumgebungen

Eine Ausgangsbasis für eine unterrichtsintegrierte Förderung, die Lernangebote auf der Grundlage der natürlichen Differenzierung anbietet und zugleich sozial-interaktive Lernprozesse unterstützt, stellen in der Mathematik substantielle Aufgabenformate dar (in der Mathematik auch als »substantielle Lernumgebung« bezeichnet). Denn sie bieten reichhaltige Möglichkeiten für unterschiedliche mathematische Aktivitäten von Kindern und sie regen die Kinder zum Erkunden, Darstellen und Erörtern mathematischer Zusammenhänge an. Zudem ermöglichen sie entsprechend der individuellen Lernvoraussetzungen unterschiedliche Zugänge und Lösungswege und können in verschiedenen Klassenstufen im Sinne des Spiralprinzips nicht allein wiederholt, sondern auch erweitert und flexibel vertieft werden (vgl. Hirt / Wälti 2007; Krauthausen / Scherer 2010; Nührenbörger / Pust 2006; Wittmann 1995b).

Während mit »Lern-Umgebungen« im Allgemeinen die konkrete Ausgestaltung der Umgebung des Lernens für Kinder, die fachbezogene Gestaltung des Klassenraums, die Bereitstellung fachspezifischer Materialien für das eigenständige Lernen der Kinder gemeint ist (s. hierzu auch entsprechende Ausführungen zum Fach Deutsch), sollen die weiteren Ausführungen auf substantielle Aufgabenformate konzentriert werden. Typisch für substantielle Aufgabenformate im Fach Mathematik ist insbesondere, dass aus einem Aufgabenformat erst noch konkrete Aufgaben zu den einzelnen förder-sensiblen Kompetenzbereichen im Sinne von produktiven Übungen konstruiert werden müssen, die dann im Unterricht einsetzbar sind. Die von Wittmann (1995b) geforderte mathematische Reichhaltigkeit sorgt dafür, dass nicht das Aufgabenformat selbst wesentlich ist, sondern seine Funktion, die dahinter liegenden grundlegenden Strukturen für Kinder auf verschiedenen Ebenen zugänglich zu machen. Mit anderen Worten: Den Zugang und die Art der thematisierten Aspekte dieser Struktur bestimmen zum einen die konkrete Aufgabenstellung, zum anderen aber naturgemäß und hauptsächlich der Umgang mit den Aufgaben.

Förderanregungen, die sich an inhaltlich-mathematischen Differenzierungen orientieren, benötigen somit für alle Kinder ein Lernangebot in einem der sensiblen Kompetenzschwerpunkte. »Dieses Angebot muss dem Kriterium der Ganzheitlichkeit genügen und darf damit auch eine gewisse Komplexität nicht unterschreiten« (Krauthausen / Scherer 2003, S. 199).

Die Arbeit der Mathematiklehrerin und die im Unterricht eingesetzten Aufgabenstellungen sind auf individuelle Förder- und Lernanregungen auszurichten. Was bedeutet dies konkret?

Auswahl geeigneter mathematischer Aufgaben

Besondere Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Einsichten in Strukturen und Beziehungen kommt den substantiellen Aufgabenformaten zu. Diese spielen im Rahmen der natürlichen Differenzierung eine tragende Rolle für die Gestaltung des regulären Mathematikunterrichts. Insofern ist es nicht überraschend, dass auch eine unterrichtsintegrierte Förderung, die den Fokus auf die Entwicklung eines beziehungsreichen und verständnisorientierten mathematischen Wissens setzt, an substantiellen Aufgabenformaten anknüpft. Diese sind allerdings dahingehend zu analysieren, 1. inwiefern die Auseinandersetzung der Kinder mit den Aufgaben auch diagnostische Erkenntnisse über individuelle Lernstandsentwicklungen erlauben und

2. inwiefern sie zugleich Anregungen für individuelle Förderprozesse geben können.

Die Lehrkraft ist somit aufgefordert, die Bearbeitungsformen der Kinder – eben auch der Kinder mit Lernschwierigkeiten – bei der Auseinandersetzung mit dem Aufgabenformat so zu analysieren, dass sie diagnostische und zugleich mit Blick auf die weitere Förderung handlungsleitende Erkenntnisse über besondere, individuelle Kompetenzen und Schwierigkeiten gewinnen kann. Hierzu bietet es sich an, die kindliche Leistung nicht allein im Vergleich mit den anderen Kindern zu sehen, sondern gerade vor dem Hintergrund des Spektrums an mathematischen Lösungsmöglichkeiten, Denkweisen und auch Entwicklungsprozessen. Im Unterricht sind daher die Aufgabenformate adaptiv an die Voraussetzungen der Lernenden anzuschließen, um zugleich individuelle Förderprozesse auszulösen (vgl. Hanke 2010, Häsel-Weide / Nührenbörger 2010). »Diagnosen sind unwirksam, mitunter sogar kontraproduktiv, weil stigmatisierend, wenn sie nicht zu einer nachhaltigen Förderung führen« (Kretschmann 2008, S. 7).

Mit anderen Worten, die unterrichtsintegrierte Gestaltung von Förder- und Lernprozessen im Anfangsunterricht bleibt nicht allein beim Erkennen der Vorkenntnisse und Kompetenzen der Kinder stehen. Vielmehr wird der Unterricht auf der Grundlage der im Zuge der Bearbeitung gewonnenen diagnostischen Erkenntnisse über die Lernschritte des einzelnen Kindes hinsichtlich einer langfristigen Wissensentwicklung an den Lernpotenzialen des einzelnen Kindes angepasst. Oder mit den Worten Vygotskys (1969) formuliert: Der Blick ist auf die aktuelle Zone der Entwicklung des einzelnen Kindes gerichtet, um daran anknüpfend im Unterricht die Zone der nächsten Entwicklung zu erreichen. Zukünftige Lernschwierigkeiten können womöglich eher verhindert werden, wenn mögliche sensible Problemfelder und Hintergründe frühzeitig aufgedeckt und letztlich produktiv im Unterricht gefördert werden können (vgl. Lorenz 2008).

Aufgaben der Lehrkraft

Für Lehrkräfte gelten »ein Bündel von Kenntnissen, Fähigkeiten, Einstellungen / Haltungen und Routinen« (Krauthausen / Scherer 2010, S. 7), die dem Einsatz und der Moderation von Lernprozessen zugrunde liegen: Damit gemeint sind Anregungen für die Kinder, mathematische Beziehungen zu entdecken, zu beschreiben und näher zu begründen bzw. mit Bezug auf Äußerungen einer Mitschülerin bzw. eines Mitschülers zu erklären. Die Leistungen der Kinder können behutsam, differenziert und kompetenzorientiert aufgegriffen werden. Eine kompetenz- und schülerorientierte Sichtweise auf die Leistungen der Schüler schließt einerseits einen produktiven Umgang mit fehlerhaften Lösungsweisen mit ein, andererseits richtet sie den Fokus weniger auf die Ergebnisse, die Produkte, sondern mehr auf die zentralen mathematischen Prozesse im Zuge der Bearbeitung und Erläuterung der Aufgaben (vgl. Sundermann / Selter 2006b).

Des Weiteren ist die Lehrkraft angehalten, auch leistungsschwächere Kinder zu ermutigen, den eigenen Lern- und Bearbeitungsprozess mit zu gestalten und eigenständig alternative Wege zu gehen (vgl. Häsel-Weide 2010). Hierbei sollten die Kinder von Anfang an zum Beschreiben und Begründen aufgefordert werden. Ansonsten besteht die Gefahr, dass Kinder lediglich Ähnlichkeiten zwischen Zahlen wahrnehmen, ohne strukturelle mathematische Bedeutungen zu verstehen. Mit anderen Worten: Es gilt, Denkprozesse der Kinder nicht zu unterbrechen oder vorzugeben, sondern aufzugreifen und fortzuführen sowie den Diskurs mit anderen Kindern aufrechtzuerhalten.

Didaktische Leitideen

Dieser Umgang mit den Aufgaben ist geprägt von den drei grundlegenden didaktischen Leitideen – beziehungsreich und verstehensorientiert, diagnosegeleitet und differenziert, kooperativ und kommunikativ –, die über die unterschiedlichen Kompetenzschwerpunkte hinweg handlungsleitend für die Gestaltung der Förderprozesse sind. Im Folgenden werden die mathematikspezifischen Charakteristika der drei Leitideen und ihre Bedeutung für die Förderung näher vorgestellt.

beziehungsreich und verstehensorientiert

Mathematisches Wissen wird oftmals mit der Kenntnis von Rechenverfahren und der sicheren Beherrschung von Aufgaben gleichgestellt. Allerdings ignoriert diese Sichtweise den Kern mathematischen Wissens, der relationales Wissen um die Zusammenhänge zwischen Zahlen und Termen umfasst. Ziel der Förderung muss daher stets der langfristige, verstehensorientierte Aufbau eines fundamentalen Wissens sein, das sich auf das Verständnis mathematischer Zusammenhänge stützt. Insofern sollten sich *differenzierte Zugänge* zur Bearbeitung mathematischer Aufgaben nicht auf die Quantität und den qualitativen Schwierigkeitsgrad der Aufgaben beschränken, sondern die *operative Struktur* des Faches in das Zentrum der mathematischen Tätigkeit rücken. Mit anderen Worten: Wenn Zahlen nicht mehr allein zum Rechnen genutzt werden, ergeben sich vielfältige Formen der Differenzierung bei der Auseinandersetzung mit den operativen Beziehungen zwischen Zahlen (vgl. Steinbring 1995). Gerade für den Aufbau eines Beziehungssystems, das strukturelle, innermathematische Vorstellungen und Darstellungen umfasst, ist es wichtig, dass die Kinder im Unterricht operative Beziehungen zwischen Aufgaben entdecken und nutzen lernen (vgl. Gaidoschik 2009; Gerster 2009).

Jedoch finden sich oftmals für leistungsschwächere Kinder in der alltäglichen Unterrichtspraxis Förderideen wieder, die eher dem Prinzip der kleinen Schritte Rechnung tragen und Lerninhalte von vornherein stark reduzieren, wie sie etwa bei Hellmich (2010, S. 190) zum Ausdruck kommen: »Besonders für leistungsschwächere Kinder gilt es, mathematische Lehr-Lerngänge im Grundschulunterricht in einer individuumsgerechten Weise darzubieten. (...) Um gerade solchen Kindern den Erwerb mathematischer Kompetenz in einer redlichen Weise zu ermöglichen, bietet sich das Lernen in kleinen und – vor allen Dingen – verständlichen Erarbeitungsschritten an.« Diese Sichtweise scheint aus einer Erfahrung zu wachsen, dass lernschwache Kinder von sich aus Schwierigkeiten zeigen, mathematische Zusammenhänge zwischen Zahlen und Operationen zu sehen.

Ohne auf die Hintergründe für diese oftmals paradoxe Ansicht auf die exklusive Förderung von lernschwächeren Kindern in der Tradition einer Hilfsschuldidaktik näher einzugehen (vgl. Scherer 1999), wird hier darauf hingewiesen, dass gerade auch leistungsschwächere Kinder Anregungen finden müssen, mathematische Beziehungen von sich aus in den Blick zu nehmen, in ganzheitlichen Kontexten zu erkunden und nicht allein, sondern im Diskurs mit anderen Kindern zu artikulieren, um diese letztlich zu verstehen; auch wenn ihre Erkenntnisse nicht denen anderer Kinder gleichen. Die Konzeption des aktiv-entdeckenden und sozial-interaktiven Lernens »(...) ist gerade auch für Schülerinnen und Schüler mit Beeinträchtigungen hilfreich, da diese durch die Fokussierung auf »das Wesentliche« die Verwendung von strukturierten Arbeitsmitteln und durch das produktive Üben Unterstützung durch Strukturen »von der Sache her« erhalten« (Scherer / Moser-Opitz 2010, S. 10).

Hier kommt dem Aufbau operativer Beziehungen die zentrale Bedeutung für die Ablösung vom zählenden Rechnen bzw. einer Prävention von Rechenschwierigkeiten zu. Damit gemeint ist einerseits der Aufbau des Verstehens zentraler Zahlbeziehungen (wie z. B. das Ganze und seine Teile oder dezimale Zusammenhänge), andererseits auch die Automatisierung von Kernaufgaben wie Verdopplungen, Zerlegungen von Zahlen kleiner 10 oder Ergänzungen zum nächsten Zehner (vgl. Moser-Opitz 2007).

So stellt die Aufgabe $15 + 9$ nicht allein eine Rechenanforderung für die Kinder dar, zur Zahl 15 neun hinzu zu addieren, sondern zugleich diesen Term in Beziehung zu anderen Zahlen – v. a. mit Blick auf die dezimale Struktur unseres Zahlensystems, also mit Blick auf Fünfer und Zehner – und auch Operationen zu sehen. Beispielsweise beträgt der Abstand vom ersten Summand 15 bis zum nächsten Zehner fünf und diese können zugleich als Teil im 2. Summanden gedeutet werden: $15 + 9 = 15 + (5 + 4) = (15 + 5) + 4 = 20 + 4 = 24$. Eine andere Sichtweise verknüpft den 2. Summanden mit einem Zehner und sieht die Differenz 1: $15 + 9 = 15 + (10 - 1) = (15 + 10) - 1 = 25 - 1 = 24$. Darüber hinaus sichern die elementaren mathematischen Gesetze wie auch das Distributivgesetz weitere Beziehungen zwischen Addition und Multiplikation. In diesem Fall bedeutet dies, dass $15 + 9 = (5 \cdot 3) + (3 \cdot 3) = 8 \cdot 3 = 24$ gilt. Grundlegende Darstellungen am Punktefeld oder am Rechenstrich können hier das Verständnis der operativen und numerischen Beziehungen unterstützen und zum Aufbau flexibler Vorstellungen beitragen (vgl. Lorenz 2009a).

Auch Lorenz und Radatz (1993, S. 29) betonen die Beziehung zwischen der Förderung lernschwächerer Kinder und dem Lernen aller Kinder: »Die aktuellen Forschungsansätze sehen in lernschwachen Schülern keine Gruppe, die sich in ihrem Lernverhalten qualitativ von ihren Klassenkameraden unterscheidet. Allerdings ist an ihnen in pointierter Weise zu beobachten, welche kognitiven Fähigkeiten der Mathematikunterricht fordert, bzw. welche Defizite zu Störungen im mathematischen Begriffserwerb führen und welche methodisch-didaktischen Fallstricke möglich sind, auch wenn ihnen die meisten Schüler nicht zum Opfer fallen.« Diese Folgerungen führen zur zweiten didaktischen Leitidee.

diagnosegeleitet und differenziert

Die Gestaltung einer unterrichtsintegrierten Förderung hebt die Bedeutung des »fachdidaktisch diagnostischen Wissens« (Wollring 1999, S. 275) von Lehrkräften hervor, die Lernprozesse und -schwierigkeiten nicht allein auf der Grundlage von externen Tests, sondern im unterrichtlichen Prozess der Bearbeitung von Aufgabenstellungen erfassen. »Die Diagnose von Lernfortschritten und die anschließende Förderung sind genuine Teile der Lehrertätigkeit und finden im Unterricht fortlaufend und selbstverständlich statt. Diese impliziten Formen von Diagnose und Förderung sind für die Lernfortschritte der Kinder um vieles effektiver als von außen kommende explizite Tests und Diagnosebögen« (Wittmann 2010, S. 77). In diesem Sinne werden die sorgsamsten Beobachtungen und Deutungen kindlicher Vorgehensweisen und Artikulationen sowie auch fehlerhaften Lösungswege mit Blick auf individuelle mathematische Entwicklungsprozesse zum Medium diagnostischen Handelns im Unterricht. »Bei der Beurteilung mathematischer Bearbeitungen geht es um weitaus mehr als um die Bewertung »richtig« oder »falsch«. Erforderlich ist eine differenzierte Analyse von Lernprozessen und Überlegungen der Lernenden sowie von auftretenden Fehlern und möglichen Fehlerursachen« (Scherer / Moser-Opitz 2010, S. 22f.).

So ergeben sich bei der kindlichen Bearbeitung der Aufgabe $15 + 9$ Fragen zur Art des Lösungswegs, zu grundlegenden Vorstellungen, die es dabei aktiviert, sowie zu spezifischen Schwierigkeiten und Fehlerstrategien:

Lösung a) $15 + 9 = 23$: Das Ergebnis 23 kann auf einen +/-1 Zählfehler hinweisen. Dieser Rechenfehler deutet auf ein zählendes Verständnis der Operation hin.

Lösung b) $15 + 9 = 105$: Das Ergebnis legt eher ein eingeschränktes Verständnis des Stellenwertprinzips dar: 9 wird der ersten Stelle des ersten Summanden zugerechnet ($1 + 9 = 10$), die hintere Stelle wird angehängt.

Als Leitlinien jeden diagnostischen Handelns gelten die in der pädagogischen Leistungskultur aufgezeigten Aspekte wie Kompetenz-, Subjekt- und Prozessorientierung (vgl. Sundermann/Selter 2006a, b). Substanzielle Aufgabenformate ermöglichen hierbei einerseits diagnosegeleitete Anregungen, die handlungsleitende Impulse für weitere Förderprozesse im Spannungsfeld zwischen bewusster Offenheit und gezielter Unterstützung aufzeigen. Andererseits bieten sie den Rahmen für eine natürliche Differenzierung (vgl. z. B. Wittmann 1995a); d. h. dass alle Kinder an einer eher ganzheitlich strukturierten Übung arbeiten und zugleich jedes Kind entsprechend seiner Voraussetzungen selbstständig die inhaltliche Tiefe der Auseinandersetzung bestimmen kann.

Während der natürlich differenzierten Arbeit der Kinder an den produktiven Übungen besitzt der Lehrer Zeit, diagnosegeleitet einzelne individuelle Kompetenzen und auch Schwierigkeiten zu erkennen. Hierzu bedarf es nicht eines externen Tests. Vielmehr erscheint es wichtig, dass die Lehrkraft die mathematischen Zusammenhänge einer produktiven Förderaufgabe vor dem Hintergrund der jeweils individuellen Entwicklung eines Kindes zu deuten weiß.

kooperativ und kommunikativ

Auch wenn Lernprozesse an sich individuell und weitgehend selbstgesteuert, aktiv-entdeckend vom Lernenden vollzogen werden, sind sie stets in sozial-interaktive Kontexte eingebunden. Kinder konstruieren und deuten ihr mathematisches Wissen nicht auf gleiche Weise, sondern eher uneinheitlich, situativ und exemplarisch in kommunikativen Prozessen eingebunden (vgl. Nührenböcker/Schwarzkopf 2010; Steinbring 2000). Bei der Konstruktion neuen Wissens spielt die Kommunikation zwischen den Kindern ebenso eine Rolle wie mit der Lehrperson. Die Heterogenität der Lerngruppe sichert hier eine Vielzahl an unterschiedlichen Deutungen auf mathematische Strukturen, die sich anregend auf die Bereitschaft und Fähigkeit der Kinder mit Lernschwierigkeiten auswirken kann, eigene Deutungen alternativ zum zählenden Rechnen zu entwickeln und zu verfestigen.

Die individuelle Entwicklung mathematischer Begriffe erfolgt eben nicht im Zuge der stillen und zeitlich variierenden Bearbeitung von Aufgabenserien, sondern vielmehr im Zuge interaktiver Begegnungen von Kindern, die sich über mathematische Erkenntnisse, Probleme und Zusammenhänge verständigen. Gerade die Aushandlung von Ideen – wie z. B. über Rechenwege bei der Lösung der Aufgabe $15 + 9$ – trägt zu einer Ausdifferenzierung, Flexibilisierung und letztlich auch Weiterentwicklung des mathematischen Wissens im Sinne eines Beziehungswissens bei.

Insofern sollte der Unterricht den Kindern stets auch Gelegenheiten geben, ihre Einsichten, ihr Wissen und ihre Vorstellungen für andere zu artikulieren.

Damit die Vielfalt an und Differenz zwischen den Ideen der Kinder produktiv für jedes einzelne Kind aufgegriffen werden kann – und dies ist unablässig für das Mathematiklernen –, müssen die Förderaufgaben explizit zur Verständigung über Mathematik anregen und die Kooperation der an der Bearbeitung der Aufgabe beteiligten Kinder auf differenzierte Weise ansprechen. Solche diskursiven Lernumgebungen (Brandt/Nührenböcker 2009) lassen auf der einen Seite unterschiedliche Zugänge zu und erfordern auf der anderen Seite eine gemeinsame Bearbeitung bzw. fordern zur Interaktion mit anderen auf – u. a. auch auf der Grundlage strukturierter Kooperationsformen. Diskurse beschränken sich somit nicht auf die Mitteilung von Lösungsprozeduren oder Ergebnissen, sondern haben vielmehr die Begründungskontexte für mathematische Zusammenhänge als Kern.

Mit anderen Worten: Eine anregende Kommunikationskultur erfolgt im Zuge einer eher offenen und zur Argumentation herausfordernden Gesprächsführung. Die Lehrperson stellt offene Fragen, gibt Impulse, fasst zusammen, bringt Materialien ein oder aber stellt irritierende und herausfordernde Behauptungen auf. Zudem finden die Kinder strukturelle und inhaltliche Anregungen für gemeinsame Gespräche über mathematische Entdeckungen, Beziehungen und vor allem auch Begründungen (vgl. zusammenfassend Brandt/Nührenböcker 2009). Somit haben auch lernschwächere Kindern nicht nur Zeit, mathematische Zusammenhänge zu erkunden, sondern auch zu artikulieren, indem sie eigene Vorgehensweisen und Vorstellungen zur Sprache bringen. Hierzu ist es wichtig, dass den Kindern – neben sinnvollen Phasen individuellen Arbeitens – eine kooperative Struktur gegeben wird, sodass möglichst viele unterschiedliche Ideen und Vorstellungen ins Gespräch zwischen den Kindern eingebracht werden können.

Kritische Stellen und Möglichkeiten der Förderung

Im Folgenden stellen wir zu den ausgewählten kritischen Stellen im Lernprozess (Zahlvorstellungen, Operationsvorstellungen und Zahlenrechnen) einige Beispiele für unterrichtliche Anregungen vor, an denen zugleich deutlich wird, wie gerade auch Kinder mit Lernschwierigkeiten unterrichtsintegriert gefördert werden können.

Kritische Stellen im Lernprozess	Förderideen	Beispielnnummer
Zahlvorstellungen	Zahlen am Rechenstrich verorten	1
	Zahlenfolgen konstruieren und vergleichen	2
	Zahlentafeln deuten	3
	Zahlen am Punktefeld darstellen	4
Operationsvorstellungen	Vorstellungen zur Addition entwickeln	5
	Vorstellungen zur Subtraktion entwickeln: in der Grundvorstellung Wegnehmen	6a
	Vorstellungen zur Subtraktion entwickeln: in der Grundvorstellung Ergänzen	6b
Zahlenrechnen	Flexibles Rechnen am Rechenstrich	7
	Flexibles Rechnen am Punktefeld	8

Tab. 1: Übersicht über die Förderideen

Zahlvorstellungen

Was denken Sie, wenn Sie an die Zahl 41 denken? Wie sieht Ihre 3 aus? Wie stellen Sie sich 1765 vor? Werden Kinder und Erwachsene gefragt, wie sie sich Zahlen vorstellen, beschreiben sie Zahlen in der Regel in Beziehung zu anderen Zahlen. Die 41 wird bspw. neben der 40 verordnet, die 1765 irgendwo weiter hinten – auf der Strecke zwischen 1000 und 2000 näher an der 2000; die 3 wird als eine Menge von 3 einzelnen Punkten vorgestellt.

Bei der Vorstellung von Zahlen werden somit auf unterschiedliche Weise Beziehungen zu anderen Zahlen genutzt. Allerdings bilden nicht alle Kinder diese beziehungsreichen Vorstellungen aus (vgl. Lorenz 2009a). Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigen als häufige Strategie, dass sie Zahlen in der Zahlreihe abzählen. Mental, an einer Linie oder mit Hilfe der Finger zählen die Kinder, bis sie die Position erreichen, an der die gesuchte Zahl verortet werden kann. Sie nehmen die Zahlen auf diese Weise ausschließlich als feste Position in einer Reihe wahr. Dabei nutzen sie in der Regel keine

Stützpunktzahlen – orientieren sich nicht an den Zehnerzahlen oder an den Nachbarzahlen, sondern zählen bei jeder Zahl von eins an ab. Sie verharren damit in einer Stufe der Zähl- und Zahlvorstellungsentwicklung, die in der Regel bereits im Vorschulalter durchlaufen wird (vgl. Fuson 1987). Wenn Kinder im Kindergartenalter das Zählen erlernen, zählen sie zunächst immer beginnend mit der »eins«. Erst allmählich lernen sie, ausgehend von einer anderen Zahl mit dem Zählen zu beginnen. Können Kinder die Position z. B. der »fünf« als Zahl zwischen »vier« und »sechs« bestimmen, sind sie auch in der Lage, den Zählprozess mit »fünf« zu beginnen, da sie den Nachfolger bestimmen können. Ähnliches gilt für das Zählen in Schritten. Ein verständnisbezogenes Zählen in Zweierschritten ist dann möglich, wenn die Kinder die jeweils übernächste Position bestimmen können. Beziehungen zwischen den Zahlen werden somit bei der Zahlentwicklung ausgebildet und bei der Entwicklung des flexiblen Zählens genutzt.

Die Vorstellung von Zahlen erschöpft sich jedoch nicht in der Fähigkeit, die Zahlwortreihe flexibel zu beherrschen und Positionen von Zahlen in einer Reihe zu bestimmen. Sie umfasst ferner den kardinalen Aspekt bei der Mengenbestimmung. Dabei geht es darum zu verstehen, dass die Mächtigkeit einer Menge mit einer Zahl ausgedrückt werden kann. Zahlen werden hier nicht linear gedacht, sondern als Menge. Beide Vorstellungen von Zahlen – sowohl als Positionen bzw. Relationen zu Positionen als auch als Mengen bzw. Relationen zwischen Mengen – sind bei der Entwicklung des mathematischen Verständnisses auszubilden (vgl. Krajewski 2005, S. 155).

Analysiert man genauer, wie Kinder beim Bestimmen einer Menge von Gegenständen vorgehen, so wird die Bedeutung beider Aspekte des Zählens – die Position der Zahlen in der Zahlreihe und das kardinale Verständnis – deutlich: Jedem zu zählenden Gegenstand wird genau ein Zahlwort zugeordnet. Dabei stehen die genannten Zahlwörter in einer festen Reihenfolge. Das letztgenannte Zahlwort steht somit zum einen in Beziehung zur zuvor genannten Zahl, zum anderen gibt es zugleich die Menge der gezählten Gegenstände an. Beim Abzählen von Objekten werden also beide Vorstellungen von Zahlen (Positionen und Mengen) angesprochen und beide zusammen eröffnen die Sicht auf ein verständnisvolles Bestimmen von Anzahlen. Mit anderen Worten: Im Hinblick auf tieferes Verständnis von mathematischen Zusammenhängen ist diese relationale Verbindung von Zahlen und Mengenvorstellung eine entscheidende Stelle.

Wie bei allen Lernprozessen erfolgt diese relationale Verbindung nicht automatisch, sondern sie ist ein konstruktiver Prozess, der von jedem Kind selbst hergestellt werden muss. »Aus diesem Grunde ist für die Ausbildung von geeigneten arithmetischen Vorstellungsbildern nicht die Handlung mit dem Veranschaulichungsmittel selbst so wesentlich, sondern das Nachdenken darüber« (Lorenz 2003, S. 33). Der Mathematikunterricht muss damit die Konstruktion einer relationalen Zahlvorstellung in aktiver Weise unterstützen und anregen, wozu im Weiteren drei zentrale Beispiele vorgestellt werden. Dabei erfahren Zahlen immer eine Konkretisierung in Darstellungen – z. B. als Menge von Elementen. In diese Darstellungen deuten Kinder Vorstellungen und Beziehungen hinein. Es sind die Kinder, die Zahlen und Zahlendarstellungen einen Sinn, eine Bedeutung geben. Mit anderen Worten: Die Zahlen haben ebenso wie die »Zahlzeichen zunächst für sich alleine keine Bedeutung, diese muss von den Schülern interaktiv hergestellt werden« (Steinbring/Nührenböcker 2010). Wesentlich ist dabei der Aspekt der relationalen Vorstellung von Zahlen – Zahlen stehen in Beziehung zu anderen Zahlen ebenso wie in Beziehung zu Objekten. Entsprechend wird bei den drei unterrichtsinteg-

rierten Förderideen der Fokus auf das flexible Deuten mathematischer Strukturen gelegt, die zum einen die Grundlage für die Flexibilisierung von Zählprozessen und zum anderen den Kern der kardinalen Mengenvorstellung ausmachen.

1 Förderidee: Zahlen am Rechenstrich verorten

Der Rechenstrich – auch leerer Zahlenstrahl genannt – ist eine Linie, an der Zahlen und Rechenoperationen eingetragen werden. Dabei haben die Zahlen keine feste, durch vorgegebene Einheiten bestimmte Position (z. B. Selzer / Höhtker 1995). Die Kinder sind herausgefordert die Position der Zahlen selbst festzulegen, eine eigene Konstruktion der Verteilung und Anordnung der Zahlen am Rechenstrich vorzunehmen. Ein Abzählen von Einheiten ist im Grunde nicht möglich, deshalb besteht auch nicht die Gefahr, »dass sie [die Einheiten] von den (insbesondere leistungsschwachen) Kindern als Zählhilfe, als Fingersatz verwendet werden« (Lorenz 2009b, S. 206).

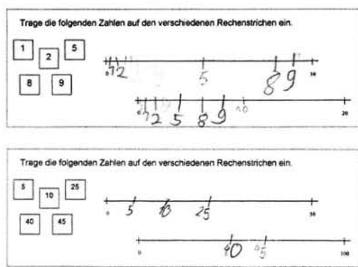


Abb. 2: Eigenproduktionen an analogen Rechenstrichen (aus Nührenbörger / Pust 2006, 77)

Rechenstriche können Kindern völlig leer zur Verfügung gestellt werden oder mit Orientierungszahlen, z. B. Anfangs- oder Endzahlen oder einzelnen bereits eingetragenen Zahlen. Im ersten Fall müssen Kinder den benötigten Zahlenraum komplett selbst konstruieren, in zweiten Fall sind bereits Beziehungen vorgegeben, die sie analysieren und weiterführen sollen. Am Rechenstrich können Zahlen bestimmten Positionen zugeordnet werden oder zur Position passende Zahlen gefunden werden.

beziehungreich und verstehensorientiert

Der Rechenstrich greift die ordinale Vorstellung von Zahlen auf, wobei ein besonderer Schwerpunkt auf die Beziehungen zwischen den Zahlen gelegt wird. Im Gegensatz zum klassischen Zahlenstrahl, an dem jede Zahl ihre feste Position hat, ist diese Position am Rechenstrich flexibel. Dabei können am Rechenstrich unterschiedliche zentrale Vorstellungen entwickelt und dargestellt werden:

- Reihenfolge der Zahlen: Auch wenn die Zahlen auf dem Rechenstrich keine feste Position haben, ist ihre Reihenfolge durch die Folge der natürlichen Zahlen bestimmt. So nimmt die Größe der Zahlen in eine Richtung stets zu oder ab.

- Zahlen ähnlicher Mächtigkeit werden auf dem Rechenstrich nah beieinander positioniert.
- Gleiche Abstände bedeuten eine gleichbleibende Schrittfolge.
- Das Verdoppeln und Halbieren von Abständen ist eine zentrale Strategie, um die Position weiterer Zahlen zu bestimmen, z. B. kann durch Halbierung der Gesamtstrecke bei einem Zahlenstrahl mit den Stützpunktzahlen 0 und 20 die 10 als weitere Stützpunktzahl gewonnen werden.
- Die (unendliche) Fortsetzbarkeit der Zahlreihe kann am Rechenstrich dargestellt werden, indem z. B. eine Leine an die Tafel gehängt, jedoch nicht abgeschnitten wird, sodass am Ende ein Knäuel Wolle hängt, dass bei Bedarf weiter abgewickelt werden kann. Alternativ können einzelne Rechenstriche aneinandergehängt werden.
- Die Darstellung eines Rechenstriches durch ein Theraband ermöglicht die relationale feste Position von Zahlen deutlich zu machen, während die absolute Position sich ändert: Werden z. B. die Zahlen mit Wäscheklammern an ein Theraband gehängt, kann dieses gestreckt oder gestaucht werden. Die totale Position der Zahl ändert sich, die relationale bleibt jedoch.

diagnosegeleitet und differenziert

Lorenz (2009b) betont im Hinblick auf die diagnostischen Möglichkeiten des Rechenstrichs, dass Lehrkräfte anhand von Dokumenten die Möglichkeit haben, einen Einblick in das kindliche Denken zu nehmen. So zeigt Abb. 3, dass es für Kinder wie Nicole, die erst wenige Beziehungen zwischen Zahlen aufgebaut haben, notwendig ist, alle Zahlen analog zum Zählen in Einerschritten zu notieren, um auf diese Weise zu den geforderten Positionen Zahlen zu finden. Die Bearbeitung von Kira zeigt ein Beispiel für Kinder, die bereits einige Zahlbeziehungen erkannt haben und in der Lage sind, ausgehend von einer Zahl die Folge weiterzuführen. Auch die ungefähre Größe der Zahlen wird bereits beachtet.

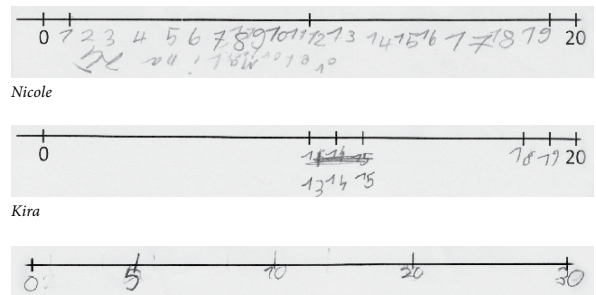


Abb. 3: Zahldarstellungen am Rechenstrich

Die Lehrkraft kann im Hinblick auf die Diagnose von Zahlvorstellung der Kinder darauf achten,

- inwieweit Relationen zwischen Zahlen durch passende Abstände ausgedrückt werden können,
- welche Abschnitte sie von sich aus wählen,
- ob gleiche Abschnitte mit gleichen Schrittfolgen belegt werden,
- wie Kinder die Positionierung von Zahlen erläutern,
- inwieweit Kinder Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Rechenstrichen (z. B. 0 bis 20, 20 bis 40 usw. erkennen, nutzen und erläutern können.

Rechenstriche bieten so reichhaltige Möglichkeiten der Differenzierung, dass eher darauf geachtet werden muss, innerhalb einer Klasse nicht zu viele unterschiedliche Möglichkeiten und Produktionen zuzulassen, damit ein Austausch weiterhin möglich ist.

Zur Eigenproduktion können leere Rechenstriche zur Verfügung gestellt werden, an denen Kinder selbst gewählte Zahlen eintragen können. Rechenstriche, an denen Zahlen eingetragen werden sollen, können durch die Wahl der Zahlen differenziert und parallelisiert werden. So können schwächere Kinder ausgewählte Zahlen im Zahlenraum bis 20 eine Position zuweisen (z. B. 7, 8, 9, 17, 18, 19), leistungsstärkere Kinder solchen, die bereits im Hunderterraum liegen (z. B. 37, 38, 39, 47, 48, 49). Interessant ist es dann, diese Rechenstriche zu vergleichen und die dekadischen Analogien zu besprechen.

kooperativ und kommunikativ

Die Offenheit der Rechenstriche für unterschiedliche Konstruktionsprozesse bietet zwar eine Vielzahl an informellen Kommunikations- und Kooperationsanlässen. Allerdings sollten diese hier gezielt eingefordert werden, um die Entwicklung des relationalen Denkens der Kinder zu fördern: Stellt man beispielsweise Kindern die Aufgabe, abwechselnd Zahlen auf Zahlenkärtchen an einen Rechenstrich anzulegen, entsteht zwangsläufig während der Arbeit ein Austausch zwischen den Kindern. Die vom Partner gewählte Position der Zahlenkarten wird kommentiert, die Position von Karten muss ggf. verändert werden, wenn neue Zahlen dazukommen.

Haben Kinder Zahlen am Rechenstrich zunächst in Einzelarbeit für sich geordnet, können die entstandenen Rechenstriche miteinander verglichen werden. Wie unterscheiden sich die Rechenstriche? Welcher ist richtig? Welche Position bekäme eine weitere, größere Zahl, bspw. die 25?

Das Zusammenlegen von unterschiedlichen Rechenstrichen zu einem gemeinsamen langen Rechenstrich (vgl. Abb. 4) ist eine Möglichkeit, die Aktivitäten von leistungsschwächeren Kindern zu würdigen, die sich evtl. in einem kleinen Zahlenraum engagieren oder einfache Zahlbeziehungen wie z. B. Vorgänger und Nachfolger in den Blick nehmen. Ihre Stücke werden jedoch für einen langen Rechenstrich ebenso benötigt wie die Abschnitte, die ein leistungsstärkeres Kind in einem höheren Zahlenraum bearbeitet hat.



Abb. 4: Ein aus Abschnitten zusammengesetzter langer Rechenstrich

2 Förderidee Zahlenfolgen konstruieren und vergleichen

Ähnlich zu den Aktivitäten am Rechenstrich zielen die Aktivitäten zu Zahlenfolgen auf den Aspekt der linearen Position von Zahlen in Abhängigkeit von anderen Zahlen. Dabei ist bei den Zahlenfolgen der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen einer Folge konstant. Wie auch bei den Rechenstrichen werden immer nur Ausschnitte der Zahlreihe betrachtet. Diese Ausschnitte können miteinander verglichen werden und machen dann wiederum Zahlbeziehungen deutlich, z. B. Verdopplungen oder Veränderungen um + 10.

		4	5	6					
4	6	8							
14	16	18							

Abb. 5: Zahlenfolgen

beziehungsreich und verstehensorientiert

Zentraler Aspekt bei der Auseinandersetzung mit Zahlenfolgen ist das Verständnis, dass es sich um einen Ausschnitt handelt, der fortgesetzt werden kann. Hiermit wird das mathematische Grundprinzip der natürlichen Zahlen angestoßen (vgl. Hasemann 2003). Startet die Zahlenfolge nicht mit 1, ist natürlich auch eine Fortführung im Sinne des Rückwärtszählens bis 1 möglich. Der zweite wesentliche Aspekt besteht darin, dass nicht alle Zahlen eines Ausschnitts in einer Zahlenfolge abgebildet werden, sondern z. B. alle geraden Zahlen oder alle Zahlen, die ausgehend von einer Startzahl durch Weiterzählen mit dem Schritt 3 erreicht werden können.

Durch die Auswahl des Ausschnitts und die Auswahl der Zahlen wird die Beziehung der Zahlen untereinander deutlich. Da in den Zahlenfolgen die Abstände zwischen Zahlen einer Folge immer gleich sind, können die Zahlen ausgehend von der ersten Zahl des Streifens durch Zählen in Schritten erreicht werden. Ist die erste Zahl des Streifens nicht gegeben, kann diese durch schrittweises Rückwärtszählen bestimmt werden.

diagnosegeleitet und differenziert

Entsprechend der Entwicklung des Zählens stellen unterschiedliche Zahlenfolgen unterschiedliche Anforderungen an die Kinder. Aufgrund der Kenntnisse zum Erwerb der Zahlwortreihe kann davon ausgegangen werden, dass Kinder die natürliche Folge der Zahlen am einfachsten fortsetzen können. Um zusätzliche Zählkompetenzen anzusprechen und zu fördern, können Zahlenstreifen in Bezug auf folgende Aspekte variiert werden:

- Die Fortsetzung der Zahlenfolge kann vorwärts oder rückwärts zählend erfolgen.
- Die Zahlenfolge weist Schritte größer 1 auf.
- Die erste Zahl in der Zahlenfolge ist nicht eins.

Lehrkräfte können beobachten, welche Aspekte die Kinder benennen, wenn sie die Zahlenfolgen in den Blick nehmen. Hier gibt es Kinder, die vor allem die Beziehung der Zah-

len untereinander betrachten («immer zwei Schritte mehr») oder die auf die Eigenschaften der Zahlen abheben («alles gerade Zahlen», «alles Zehnerzahlen»).

Eine Differenzierung im Unterricht kann entsprechend über die gewählten Ausschnitte und Zähl Schritte erfolgen. Dabei sollte stets die Stufe der nächsten Entwicklung in den Blick genommen werden. In Anlehnung an die Zahlentwicklung sollten unterschiedliche Zahlenstreifen angeboten werden, sodass Kinder auf ihrem Niveau angesprochen werden, z. B. indem Folgen vorwärts und rückwärts in Einerschritten fortgesetzt werden sollen oder in Einerschritten von unterschiedlichen Startzahlen an die Zahlenfolge fortgesetzt werden soll. Ebenso kann bei gleichbleibender Startzahl die Schrittfolge variiert werden oder bei gleichbleibender Schrittfolge ein anderer Ausschnitt gewählt werden. Die Differenzierung kann dabei von der Lehrkraft vorgenommen werden, indem diese auf dem Hintergrund ihrer Diagnose passende Streifen zur aktuellen und nächsten Stufe der Entwicklung anbietet. Bei diesem Aufgabenformat kann jedoch diese Differenzierung von den Kindern selbst vorgenommen werden, indem bspw. einem Paar oder einer Tischgruppe Streifen unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus angeboten werden. Im Sinne des gemeinsamen Gegenstandes arbeiten alle Kinder mit dem Aufgabenformat Zahlenstreifen, jedoch auf unterschiedlichen Niveaus.

kommunikativ und kooperativ

Werden Kinder nach der eigenen Bearbeitung einzelner Streifen aufgefordert, ihre Streifen zu ordnen, wird der Aspekt der Beziehung der Zahlen verstärkt angesprochen. Die zu zweit arbeitenden Paare sollten unterschiedliche Streifen zusammenlegen. Dabei müssen sie sich entscheiden und miteinander besprechen, welche Aspekte des Ausschnitts aus der Zahlreihe sie betrachten wollen (z. B. gleiche Startzahl, verschobener Ausschnitt, gleicher Ausschnitt vorwärts und rückwärts, Vervielfachung der Zahlen usw.).

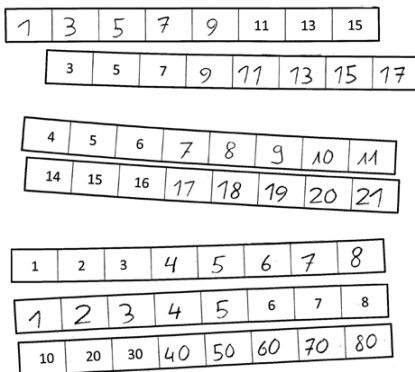


Abb. 6: geordnete Zahlenfolgen

In der Kooperation mit anderen erleben auch diejenigen Kinder, die nur einige oder aus mathematischer Sicht leichte Zahlenstreifen bearbeitet haben, dass ihre Streifen Teil der neuen Ordnung werden. Alle Zahlenstreifen – unabhängig vom mathematischen Niveau – werden genutzt. Diese Wertschätzung ihrer Arbeit ist für leistungsschwächere Kinder eine nicht zu unterschätzende Motivation. Gleichzeitig sehen sie «ihre» Zahlenstreifen in Beziehungen zu anderen Streifen und erkennen dadurch möglicherweise neue Aspekte. Bittet man Kinder, zu ihrer Ordnung einen weiteren passenden Streifen zu finden, sind sie aufgefordert, diese Beziehung konstruktiv umzusetzen.

Das Ordnen von Zahlenfolgen und das gemeinsame Finden neuer Folgen sollte von Gesprächen über die zugrunde gelegten Ordnungsprinzipien begleitet werden. Kindern mit begrenzten sprachlichen Möglichkeiten wird über das Ordnen und Finden neuer Folgen die Gelegenheit gegeben, ihre Kenntnis der mathematischen Beziehungen auszudrücken, ohne auf Sprache zurückgreifen zu müssen. Ziel der Kooperation ist es jedoch auch, dass Kinder dort schon Begriffe für die Zahlbeziehungen entwickeln, wenn sie die Streifen gemeinsam ordnen.

Auf jeden Fall sollte die sprachliche Beschreibung der Ordnungskriterien Teil der Reflexion im Klassengespräch sein. Über die begriffliche Fassung der unterschiedlichen Aspekte werden diese von Kindern bewusst als Merkmal von Zahlen bzw. Zahlbeziehungen wahrgenommen. Oft finden Kinder aus der Alltagssprache gute sprachliche Umschreibung. Die Lehrkraft kann jedoch auch an dieser Stelle mathematische Fachbegriffe wie z. B. gerade, ungerade Zahlen einführen.

3 Förderidee Zahlentafeln deuten

Ebenso wie bei den Zahlenstreifen geht es bei den Aktivitäten zu Zahlentafeln darum, die Positionen von Zahlen zu bestimmen und zugleich die Beziehungen zwischen Zahlen untereinander zu reflektieren. Systematische Anordnungen von Zahlen unterschiedlichster Art finden Grundschulkindern auch außerhalb der Schule auf vielfältige Weise vor – z. B. auf einem Monatsblatt von einem Kalender. In der Schule können gerade die spezifischen Anordnungen zum expliziten Lerngegenstand werden. Auf Grund der Wochenstruktur des Monats »verändern« sich die Zahlen vertikal in jeder Zeile um 7 – und eben nicht um 10, wie etwa an der 100er-Tafel.

Alltägliche Zahlentafeln auf einem Kalender mit einer 7er-Struktur dienen hier als Grundlage, von der aus für Kinder die besondere Anordnung einer Tafel mit 10er-Struktur (z. B. die 100er-Tafel) in den Blick genommen werden kann (s. Abb. 7). Für Kinder wird durch die Konfrontation und den Vergleich der eher »umständlichen« 7er-Struktur und der zum Zahlensystem passenden 10er-Struktur die Kraft der dekadischen Analogien – wie sie an der 100er-Tafel zum Ausdruck kommt – bewusst und sinnhaft wahrgenommen (vgl. Nührenböcker/Schwarzkopf 2010).

beziehungsreich und verstehensorientiert

Die spezifische Struktur der Zahlverteilung auf den Feldern erlaubt eine verstehensorientierte Schulung spezifischer Zählprozesse. Beispielsweise können Zählübungen an verschiedenen Monatsblättern, die an unterschiedlichen Wochentagen beginnen, vorgenommen werden. Es finden sich je nach Monat die gleichen Zahlen in verschiedenen Feldern, sodass immer wieder die Beziehung zwischen den Zahlen reflektiert wird. Gerade

Lücken in den Zahlentafeln (s. Abb. 7) fordern zur Fortsetzung der natürlichen Zahlen im Sinne des Vorwärts- und Rückwärtszählens in Einer- oder Zweierschritten ebenso heraus wie zur Nutzung spezifischer Strukturen zwischen übereinander stehenden Zahlen. Die Auswahl spezifischer Zahlen spricht zudem gezielt Erkundungsmöglichkeiten von Zahleigenschaften wie die Parität an.

Abb. 7: Lücken an Kalenderblättern und an der 100er-Tafel (hier nur Ausschnitt bis 50)

Darüber hinaus bieten sich – auch wenn die Zahlen auf dem Kalenderblatt als Ordinalzahlen den jeweiligen Tag eines Monats angeben und es im Alltag unsinnig ist, Wochentage »zu addieren« – eher arithmetisch-strukturelle Interpretationen an, denn die Zahlen sind wie in einer Additionstabelle angeordnet; d.h. es können unterschiedliche quadratische oder rechteckige Felder ausgewählt werden, deren Differenzen oder Summen spezifische Regelmäßigkeiten aufweisen (vgl. Wittmann/Müller 1990). Beispielsweise können Schablonenausschnitte, in denen die Summen der diagonal zueinander stehenden Zahlen verglichen werden, die strukturellen Beziehungen zwischen den Zeilen und Spalten in den jeweiligen Tabellen verdeutlichen.

diagnosegeleitet und differenziert

Die unterschiedlichen Zahlentafeln stellen je nach Struktur der Lücken unterschiedliche Anforderungen an die Zählkompetenzen und die Zahlvorstellung der Kinder ebenso wie an die Fähigkeiten zur Nutzung mathematischer Strukturen. Arbeiten die Kinder mit unterschiedlichen Lupen, werden sie je nach Kompetenz verschiedene Ausschnitte an Zahlen in den Fokus ihrer mathematischen Erkundung nehmen und untersuchen: Wie stehen die abgedeckten Zahlen in Beziehung zueinander? Die unterschiedlichen Zahlentafeln bzw. Ausschnitte bieten den Kindern somit im Sinne der natürlichen Differenzierung die Gelegenheit, den Zahlenraumausschnitt ebenso wie die Komplexität der Aufgabenstellung eigenständig zu wählen, ohne dass aber die von allen Kindern in den Blick zu nehmenden mathematischen Beziehungen verloren gehen.

Abb. 8: Lupen an Kalenderblättern und an der 100er-Tafel (aus Nührenböcher/Schwarzkopf 2010)

Neben der Variation der Lücken kann auch die Komplexität der 100er-Tafel dahingehend reduziert werden, dass zunächst lediglich die Zahlen bis 20 oder bis 50 erkundet und die restlichen mit einer farbigen Folie abgedeckt werden (vgl. Nührenböcher/Pust 2006). Ebenso sollten anfangs solche Monatsblätter ausgewählt werden, deren erster Tag auf einen Montag fällt, sodass keine Felder vor der »1« frei bleiben.

Die Lehrkraft kann im Hinblick auf die Diagnose der Zählkompetenzen der Kinder darauf achten,

- wie einzelne Zahlücken ergänzt werden,
- inwieweit auch in Sprüngen gezählt werden kann,
- auf welche Weise Erklärungen vorgenommen werden,
- welche Beziehungen innerhalb bestimmter Zahlenausschnitte gefunden werden,
- wie Beziehungen zum dekadischen System explizit werden.

kommunikativ und kooperativ

Auf der einen Seite sollten die Kinder vielfältige Gelegenheiten finden, eigenständig und dem eigenen Niveau entsprechend einzelne Zahlentafeln zu bearbeiten. Auf der anderen Seite können sich aber auch Kinder untereinander in einem (ggf. sich der Einzelarbeit anschließenden) Partnergespräch über unterschiedliche Formen des mathematischen Zugangs austauschen, sodass die eigene Zählkompetenz weiter ausdifferenziert und flexibilisiert wird. Die Kooperation bietet hier eine Anregung, über eigene Ideen nachzudenken, Hilfen zu erhalten, aber auch fremde Sichtweisen zu reflektieren.

In der Abb. 9 wird ersichtlich, wie verschiedene Kinder unterschiedliche Kommentare zu verschiedenen Zahlentafelausschnitten notiert haben. Werden diese Ideen aufeinander bezogen, kann jedes Kind von der Idee anderer profitieren. Aber erst wenn die Vielfalt an unterschiedlichen Ideen und exemplarischen Ausschnitten systematisch aufeinander bezogen werden, übertragen die Kinder ihre verschiedenen Ideen auf »ähnliche Felder« und erkennen allgemeine Strukturen an den besonderen Beispielen. Beispielsweise kann die Lehrerin ähnliche Felder nebeneinander positionieren oder aber auch die Kinder auffordern, ähnliche Felder auszuwählen und die Auswahl zu erläutern: Beispielsweise passen am Kalender zum Feld 11, 12, 18, 19 die direkt benachbarten Felder (z. B. 9, 10, 16, 17 oder 18, 19, 25, 26), aber auch solche, die gleiche Einer besitzen: 1, 2, 8, 9. Die Kinder erkennen nicht allein, dass z. B. die Diagonalsummen gleich sind, sondern auch, wie sich diese an der Tafel in Abhängigkeit zu den gewählten Zahlen systematisch verändern.

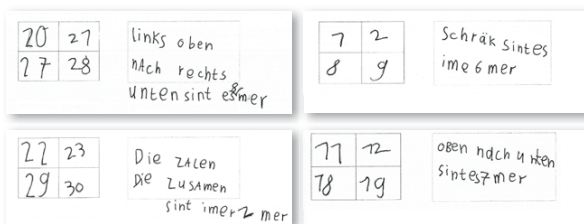


Abb. 9: Kommentare zu verschiedenen Ausschnitten eines Monatsblattes (aus Nührenbörger/Schwarzkopf 2010)

Ebenso könnten Kinder versuchen, ähnliche Felder an der 100er-Tafel aufzusuchen oder aber zwischen Kalender und 100er-Tafel zu vergleichen.

4 Förderidee: Zahlen am Punktefeld darstellen

Die Ausdifferenzierung einer beziehungsreichen Zahlvorstellung sollte nicht nur (wie bereits vorgestellt) den ordinalen Aspekt aufgreifen, sondern ebenso anhand von kardinalen Darstellungen angeregt werden. Ein zentrales Anschauungsmittel des Anfangsunterrichts Mathematik ist das Punktefeld – etwa als Zwanzigerfeld auf Papier oder zusammengesetzt aus vier 5er-Schiffchen. Dieses Material eignet sich zum einen dazu, um Zahlen und Operationen darzustellen, zum anderen auch um vielfältige Beziehungen zwischen Zahlen zu deuten.

beziehungsreich und verstehensorientiert

Die Darstellung von Zahlen am Punktefeld kann auf unterschiedliche Weise von den Kindern interpretiert werden. In der Abb. 10 sind 14 schwarze und 6 weiße, insgesamt also 20 Punkte zu sehen. Die schwarzen Punkte können dabei auf unterschiedliche und unterschiedlich geschickte Weise zerlegt werden (vgl. Abb. 10). Dieses Zerlegen in Teilmengen macht das mathematische Teile-Ganzes-Prinzip deutlich: Eine Menge kann in (unterschiedliche) Teilmengen (unterschiedlicher) Mächtigkeit gegliedert werden. Die Gesamtanzahl bleibt dabei konstant, verändert sich also nicht.

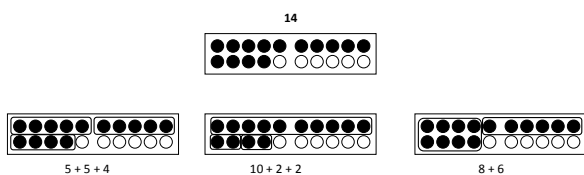


Abb. 10: Additive Zerlegungen der 14 am 20er-Feld

Eine derartige Thematisierung von Zerlegungen einer Anzahl in unterschiedliche Teile leistet zweierlei: Zum einen wird eine Zahl als Menge dargestellt und sie bleibt nicht ein Punkt auf einer Linie. »14« bedeutet nicht der 14. Punkt im Zwanzigerfeld, sondern die Menge aller schwarzen Punkte. Es ist damit unerheblich, aus welcher Richtung, in welcher Reihenfolge, aus welchen Teilmengen die 14 bestimmt wird. Deutlich wird, dass unterschiedliche Wege möglich sind, um die »14« darzustellen bzw. zu bestimmen. Zum anderen werden über die Zerlegung in Teilmengen unterschiedliche Teile-Ganzes-Beziehungen deutlich:

- die Menge kann in Zehner und Einer zerlegt werden,
- die Menge oder eine Teilmenge kann halbiert werden,
- die Kraft der Fünf kann genutzt werden oder eine andere quasi-simultan zu erfassende Zerlegung.

Die Zerlegung in Teilmengen ist zwar durch die Anordnung des Punktefeldes z. B. in Zehnerreihen mathematikdidaktisch intendiert. Dies bedeutet jedoch nicht, dass Kinder diese Struktur automatisch sehen. Vielmehr sind die Strukturen von den Kindern in die Anordnung der Punkte hineinzusehen, d. h. sie sind von den Kindern bewusst zu konstruieren. Je mehr Kinder über die Strukturen des Punktefeldes wissen, desto eher sehen sie diese auch und können sie bei der Anzahlbestimmung nutzen (vgl. Söbbeke/Steinbring 2007). Die Deutungsweisen der Kinder können sich dabei stark von den Vorstellungen Erwachsener unterscheiden ebenso wie von Vorstellungen anderer Kinder. Wird diese Heterogenität im Mathematikunterricht aufgegriffen und genutzt, besteht eine gute Möglichkeit, mit den Kindern über Zahlvorstellungen zu sprechen und das »Seh-Verstehen« der Kinder auszuweiten.

diagnosegeleitet und differenziert

Bei der Beobachtung von Kindern beim Ermitteln von Anzahlen im Punktefeld könnten Lehrkräfte darauf achten,

- wie die Kinder bei der Ermittlung einer Anzahl vorgehen: Zählen Sie Punkte einzeln ab oder nutzen sie bereits quasi-simultan erfasste Teilmengen,
- inwiefern die Zählprinzipien beim einzelnen Abzählen beherrscht werden,
- wie Kinder selbst eine Zahl im Punktefeld darstellen,
- welchen Zerlegungen sie welche Darstellungen zuordnen,
- welche Zerlegungen sie selbst finden,
- inwieweit zentrale Zerlegungen wie z. B. die Zehnerstruktur bei Aufgaben zum schnellen Sehen genutzt werden.

Weitgehend unabhängig vom Vermögen der Kinder, Zerlegungen im Rahmen der Anzahlbestimmung von sich aus zu nutzen, kann die Zuordnung von Aufgaben zu Zahl-darstellungen Kinder auf unterschiedliche Weise herausfordern. Leistungsstärkere Kinder finden alle passenden Zerlegungen zu einer Anzahl und kreieren von sich aus neue. Leistungsschwächere Kinder erkennen, dass zu einer Anzahl Zerlegungen zugeordnet werden können und machen so grundlegende Erfahrungen zum Teile-Ganzes-Prinzip. Die Reichhaltigkeit der Aufgabenstellung ermöglicht eine natürliche Differenzierung, die sich auch auf Eigenproduktionen der Kinder bezieht.

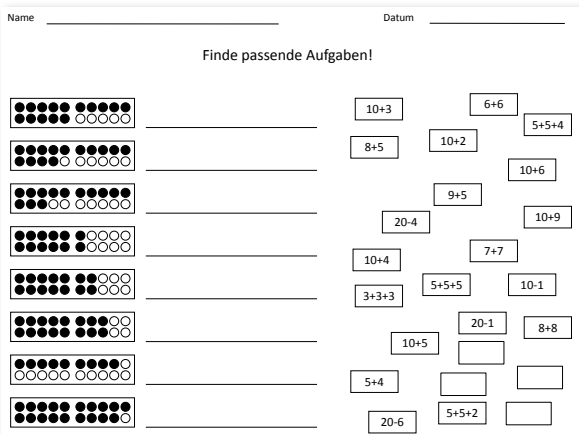


Abb. 11: Arbeitsblatt zu unterschiedlichen Deutungen von Zahldarstellungen

kooperativ und kommunikativ

Die individuellen Zugangsweisen der Kinder beim Finden von Zerlegungen stellen eine gute Möglichkeit dar, sich über die gefundenen passenden Aufgaben auszutauschen und diese zu vergleichen. Dabei werden Kinder angeregt, über ihre Sichtweise hinaus die der anderen nachzuvollziehen und ggf. auf eine andere Aufgabe zu übertragen. Auch im Klassengespräch ist das Deuten von Aufgaben an Punktefeldern sehr fruchtbar, da sich auch hier zeigt, dass Kinder ein und dieselbe Zerlegungsaufgabe auf unterschiedliche Weise am Feld deuten. Beispielsweise wird die Zahl 10 von einigen Kindern linear als eine ausgefüllte Reihe wahrgenommen, bei anderen Kindern dominiert die Vorstellung der Doppelfünf.

Um unterschiedliche Deutungen auch für Kinder erlebbar zu machen, kann das obige Arbeitsblatt so bearbeitet werden, dass ein Kind eine passende Zerlegungsaufgabe zuordnet und das Partnerkind die Zerlegung am Feld zeigt. Hier wird schnell deutlich, ob Kinder die gleiche Vorstellung im Kopf haben oder nicht. Ähnlich kann auch in einem Klassengespräch vorgegangen werden, wenn Kinder verdeckt hinter den Tafelflügel von der Lehrkraft oder von Mitschülerinnen bzw. -schülern genannte Zerlegungen am Punktefeld einkreisen. Werden dann beide Tafelflügel umgeklappt, können die Einkreisungen der Kinder miteinander verglichen werden. Dabei ist es nach einer Phase des freien Deutens auch wichtig, mit den Kindern darüber zu sprechen, welche Deutungen besonders schnell erkannt werden können und langfristig mathematisch tragfähig sind.

Operationsvorstellungen

Im mathematischen Anfangsunterricht sind Addition und Subtraktion im ersten Schuljahr die beiden zentralen Operationen, zu denen im Weiteren konkrete unterrichtsintegrierte Förderideen präsentiert werden. Ergänzt werden diese durch das Verdoppeln und Halbieren, die dann als Vorbereiter der Multiplikation und Division im zweiten Schuljahr verstärkt thematisiert werden. Allen Operationen liegen zentrale mathematische Grundvorstellungen zugrunde wie z.B. der Subtraktion die Vorstellung des Wegnehmens, aber auch die des Ergänzens und des Vergleichs von Mengen. Zentrales Ziel des mathematischen Anfangsunterrichts ist, dass Kinder zu erlernten Operationen Vorstellungen entwickeln und unterschiedliche operative Veränderungen flexibel miteinander im Sinne eines operativen Beziehungs-Netztes verknüpfen können.

Kinder erlernen Grundvorstellungen durch Handlungen mit Material. Aber nicht allein die Handlung führt zur Grundvorstellung, sondern erst das Nach-Denken über die Handlung und die operativen Veränderungen. Operative Vorstellungen entwickeln sich vor allem dann umfassend, wenn sie sich nicht auf eine reduzieren lassen; d. h. z. B., dass die Subtraktion nicht auf das »Wegnehmen« beschränkt bleibt. Mit anderen Worten; Es kommt nicht darauf an, ein und dieselbe Operation mit möglichst vielen Materialien ausführen zu können, sondern die unterschiedlichen Grundvorstellungen mit einer materialgestützten Handlung zu verbinden. Dabei sollte von Beginn an darauf geachtet werden, dass die Strukturen des Materials genutzt und nicht Plättchen einzeln hinzugelegt oder weggenommen werden, sondern als Teilmenge. Ebenso ist wichtig, dass Kinder unterschiedliche Konkretisierung einer Operation am Material erleben (vgl. Förderidee 5 und 6).

Die Vorstellungen von Operationen werden zunächst durch konkrete Handlungen in Sachkontexten oder an geeigneten Anschauungsmitteln getragen. Die Operationsvorstellung entwickelt sich jedoch nicht zwangsläufig aus der Operationsdarstellung. »Wesentlich ist, dass kontinuierlich über die tatsächliche Handlung am Material die Idee einer symbolischen Handlung mit den Kindern entwickelt wird« (Söbbeke / Steinbring 2007, S. 64). Analog zur Entwicklung einer flexiblen Zahlvorstellung ergibt sich eine Operationsvorstellung nicht automatisch, wenn Kinder lang genug mit Material umgehen. Eher ist das Gegenteil der Fall. Lorenz (2003) berichtet von Kindern, die zum Teil jahrelang mit bestimmten Anschauungsmitteln wie z. B. dem Rechenrahmen arbeiten und trotzdem nicht wissen, wie viele Kugeln in einer Reihe des Rechenrahmens sind. Um Kinder zur Konstruktion einer Vorstellung anzuregen, ist es zentral, die Veränderungen am Material verdeckt auszuführen (vgl. Lorenz 2003; Schipper 1995) und sprachlich zu beschreiben, ohne sie tatsächlich auszuführen. Die mentale Konstruktion der verinnerlichten Handlung kann auf diese Weise im Mathematikunterricht angeregt werden.

5 Förderidee: Vorstellungen zur Addition entwickeln

Die Grundvorstellungen der Addition – das Zusammenfügen von Mengen einerseits oder Hinzukommen einer Menge zu einer anderen andererseits – können recht einfach in Handlungen und Zeichnungen übertragen werden (s. Abb. 12). Lehrkräften sollte dabei stets bewusst bleiben, dass es nicht die eine Darstellung einer Additionsaufgabe gibt, sondern eine Vielzahl an Möglichkeiten, welche durch die unterschiedlichen Zahlvorstellungen der Kinder bestimmt werden. Zur Ausbildung einer flexiblen Operationsvorstellung ist es wichtig, dass Kinder unterschiedliche Darstellungsformen einer Aufgabe

kennenlernen und nicht auf eine festgelegt werden. Denn unterschiedliche Darstellungsformen regen auch unterschiedliche Lösungswege an. Die Aufgabe $8 + 7$ kann als $8 + 2 + 5$ oder als $7 + 7 + 1$ oder $5 + 5 + 3 + 2$ gesehen und gerechnet werden (vgl. Krauthausen/Scherer 2003).

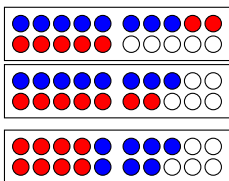


Abb. 12: Unterschiedliche Darstellungsformen der Aufgabe $8 + 7$

Auch leistungsschwächeren Kindern kann und muss die Vielfalt der Darstellungsmöglichkeiten zugemutet werden. Denn nur so gibt es eine Chance, dass auch sie ihre individuelle Sichtweise einbringen und erweitern, um langfristig flexibel und geschickt zu rechnen. Schränkt man Kinder von Beginn an auf eine »richtige« Standardform ein, kann das dazu führen, dass sie ihre Vorstellung nicht repräsentiert sehen und die Darstellung von Additionsaufgaben wie einen Algorithmus erlernen. Ziel des Mathematikunterrichts muss es jedoch sein, alle Kinder zu einer flexiblen Dar- und Vorstellung von Additionsaufgaben zu befähigen, denn nur dann können Kinder diese auch mental nutzen, anstatt sie ohne Verständnis auswendig zu lernen.

Operationsvorstellungen werden bei den Kindern über den Weg des Sprechens, Beschreibens und Interpretierens der Darstellung von Aufgaben angeregt. Deshalb ist es wichtig, die Kinder immer wieder zur Deutung von Additionsaufgaben aufzufordern und durch Verdecken des Materials zu einer Konstruktion einer eigenen Vorstellung zu ermutigen.

Neben dem Beschreiben oder Verdecken besteht eine weitere Möglichkeit darin, gezielt die Konstruktion der Operationsvorstellung anzuregen, vorliegende Darstellungen mental zu verändern. Die mentale Veränderung von Aufgaben hat den Vorteil, dass die veränderte Aufgabe nicht sichtbar ist und damit nicht konkret zählend gelöst werden kann. Auf der Grundlage einer konkret oder ikonisch vorliegenden Additionsaufgabe sollen die Kinder sich zunächst einfache Veränderungen, wie z. B. »1 Plättchen dazu« vorstellen. Diese Aufgaben sind grundlegend für das flexible Rechnen unter Ausnutzung von Mustern und Strukturen (vgl. Förderideen 7 und 8).

beziehungsreich und verstehensorientiert

Ausgangspunkt für diese Art der Vorstellungsanregung sind »einfache« Additionsaufgaben, die Kinder in der Regel schnell mental beherrschen. Zu »einfachen« Additionsaufgaben zählen Verdopplungsaufgaben ($8 + 8 = 16$), Addition zweier Summanden zu zehn ($2 + 8 = 10$) und die Addition einer einstelligen Zahl zu einem glatten Zehner ($10 + 7 = 17$). Diese Aufgaben gehören zu den Kernaufgaben des Anfangsunterrichts und werden i. d. R. von vielen Kindern nach kurzer Zeit gedächtnismäßig beherrscht (vgl. Krauthausen/Scherer 2003). Eine derartige einfache Additionsaufgabe wird nun durch Handlungsanwei-

sungen wie »1 weg«, »1 dazu« oder »1 umdrehen« verändert. Dabei sollen die Kinder diese Handlungen nicht konkret am Material ausführen, sondern sich gedanklich vorstellen.

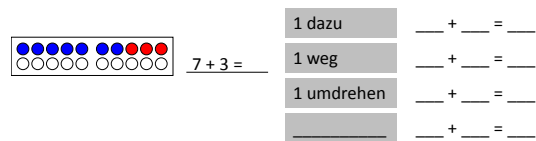


Abb. 13: Anregungen zur mentalen Veränderung von Additionsaufgaben

Pro Handlungsanweisung bestehen jeweils zwei Möglichkeiten der Konkretisierung: Die Aufgaben $7 + 3 = 10$ kann durch »1 dazu« verändert werden in $8 + 3 = 11$ oder auch in $7 + 4 = 11$. Damit Kinder beide Möglichkeiten betrachten, ist es wichtig, dass sie im Vorfeld nicht auf eine Darstellung der Addition festgelegt waren. Denn in diesem Fall käme zumindest bei »1 dazu« und »1 weg« nur eine Konkretisierung in Betracht, indem jeweils die (hier) roten Plättchen verändert würden. So hat die Aufgabe in Abb. 13 nicht nur eine, sondern zwei richtige Lösungen, worüber im Austausch zwischen den Kindern und in der Reflexion gesprochen werden kann.

diagnosegeleitet und differenziert

Entsprechend der Leistungsfähigkeit der Kinder kann die Aufgabe auf vielfältige Weise differenziert werden. Die Ausgangsaufgaben können entsprechend dem Niveau der Kinder gewählt werden. Dabei ist es möglich, für leistungsstärkere Kinder parallele Aufgaben im Hunderterraum anzubieten. Diese können sowohl mit gleichen Handlungsanweisungen durchgeführt werden, um die Parallelität deutlicher zu machen und den Austausch zu erleichtern, als auch mit größeren Zahlen oder Zahlen, die den dekadischen Charakter hervorheben wie z. B. »20 weg« bei der Aufgabe $47 + 23 = \dots$.

Eine weitere Möglichkeit der Differenzierung ist es, die Eigenproduktionen der Kinder auszuweiten. Kinder können sowohl zu verändernde Aufgaben als auch die auszuführenden Operationen (z. B. 15 dazu) selbst wählen (vgl. Abb. 14). Bei der freien Wahl kann Kindern auch deutlich werden, dass die gewählten Veränderungen stets nur so groß sein können wie der kleinste Summand, zumindest dann, wenn das Bilden von zwei passenden Aufgaben möglich sein soll.

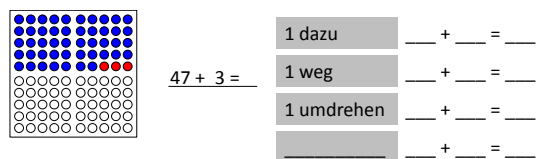


Abb. 14: Differenzierungsmöglichkeiten bei der mentalen Veränderung von Additionsaufgaben

Lehrkräfte dürfte vor allem interessieren, inwieweit leistungsschwächere Kinder zu einer mentalen Veränderung in der Lage sind und wie sie dabei vorgehen. Ist es Kindern möglich, eine Veränderung zu beschreiben und Schlussfolgerungen für die neue Aufgabe und das Ergebnis zu ziehen, ohne die Aufgabe konkret zu sehen? Dabei können Lehrkräfte den Blick darauf richten,

- welche Operationsveränderung mental gelingen,
- welche Varianten der Operationsveränderung gewählt werden,
- inwieweit Kinder Begründungen für alle möglichen Veränderungen geben,
- welche eigenen Veränderungen Kinder vornehmen.

Im Hinblick auf leistungsstärkere Kinder sollten besonders die Begründungen in den Blick genommen werden. Gelingt es Kindern, das allgemeine Muster, das diesem Aufgabenformat zugrunde liegt, zu erkennen und zu beschreiben? Inwieweit erkennen sie, dass das Umdrehen eines Plättchens immer das Gleichbleiben der Summe zur Folge hat, und wie erläutern sie dieses mathematische Gesetz der »Konstanz der Summe«?

kooperativ und kommunikativ

Wie schon angedeutet, bieten die Aufgaben reichhaltige Möglichkeiten zum Beschreiben und Begründen auf unterschiedlichen Niveaus. Zunächst ist eine Anforderung für die Kinder, genau zu verbalisieren, wie die veränderte Aufgabe am Punktefeld dargestellt wäre. Dies ist auch für Kinder herausfordernd, die auf der symbolischen Ebene die Veränderungen sehr sicher vornehmen. Diese symbolische Repräsentation einer Additionsaufgabe dann wieder auf eine ikonische zu übertragen und diese Vorstellung auch noch zu beschreiben, ist keineswegs trivial. Das Beschreiben von Darstellungen ist eine Form, die Vorstellungen der Kinder sichtbar zu machen.

Auf einer anderen Ebene ist die Begründung mathematischer Gesetzmäßigkeiten und Muster, die an diesen Aufgaben sichtbar werden, wie z. B. die Konstanz der Summe. Bei dieser Argumentation nutzen Kinder bereits ihre flexible Vorstellung der Operations- und Zahldarstellung, entwickeln sie weiter und wenden sie später beim flexiblen Rechnen an.

Das Beschreiben und Begründen von Vorstellungen und Mustern kann in kooperativen Formen oder im Austausch im Klassengespräch erfolgen. Arbeiten Kinder in Partnerarbeit mit dem Aufgabenformat, können sie sich nach der individuellen Bearbeitung über die gefundenen Aufgaben austauschen. Dies funktioniert sowohl bei gleichen als auch bei parallelen Ausgangsaufgaben. Möglich ist auch ein abwechselndes Arbeiten, indem ein Kind eine Plusaufgabe nennt (oder zieht) und darstellt und ein anderes Kind eine vorzunehmende Veränderung z. B. auf einer Karte zieht oder selbst findet. Die Paare können auf diese Weise verwandte Additionsaufgabenpaare finden, die sie bereits im Kopf berechnen können.

6a Förderidee: Vorstellungen zur Subtraktion entwickeln – in der Grundvorstellung »Wegnehmen«

Eines der zentralen Probleme beim Darstellen und Vorstellen von Subtraktionsaufgaben liegt darin, die Grundvorstellung »Wegnehmen« so darzustellen, dass alle drei Teilmengen der Subtraktion für die Kinder sichtbar und vorstellbar sind; sprich die Ausgangszahl, die abzuziehende Zahl und der Rest als Ergebnis. Nehmen Kinder z. B.

aus einer Menge von neun Wendepfättchen vier weg, ist zum Ende der Operation sowohl die Ausgangsmenge als auch der Subtrahend nicht mehr sichtbar. Das Ergebnis der Subtraktion, der Rest, liegt in Form von fünf Wendepfättchen vor den Kindern. Dies macht es im Gegensatz zur Addition – in der die zusammengefügte Mengen mit zwei verschiedenen Farben dargestellt werden können und damit jede für sich, aber auch die Gesamtmenge sichtbar bleibt – deutlich schwieriger für Kinder. Noch schwieriger ist es, auf der zeichnerischen Ebene Subtraktionsaufgaben darzustellen, in der Regel wird auf ein angedeutetes Wegnehmen zurückgegriffen (vgl. z. B. Wittmann/Müller 2005) oder die wegzunehmende Menge wird durch durchgestrichene Plättchen symbolisiert (vgl. z. B. Fuchs/Käpnick 2004). Damit wird versucht, die Handlung des Wegnehmens anzudeuten.

beziehungsreich und verstehensorientiert

Eine weitere Möglichkeit, Subtraktionsaufgaben darzustellen, ist, das Wegnehmen über eine noch leicht durchsichtige Folie anzudeuten (vgl. Schütte 2004; s. Abb. 15).

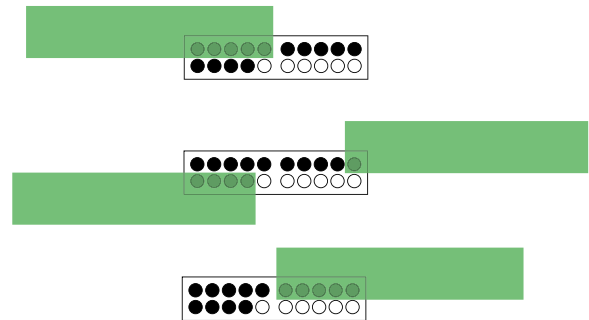


Abb. 15: Verschiedene Darstellungen der Aufgabe $14 - 5 = 9$

Diese Darstellungsform hat zwei entscheidende Vorteile: Der Subtrahend kann auf einmal abgedeckt werden. Kinder werden also von Beginn an angehalten, nicht einzelne Plättchen wegzunehmen, sondern die Menge als Ganzes zu bestimmen und abzudecken. Dabei muss einschränkend bedacht werden, dass mit nur einer Folie nicht alle Möglichkeiten einer Subtraktion dargestellt werden können, bspw. muss die verdeckte Menge immer zusammenhängen. Ähnlich wie bei der Addition sind alle drei Elemente der Subtraktion, also die Gesamtmenge (der Minuend), die verdeckte Menge (der Subtrahend) und der Rest, sichtbar. In diesem Kontext ist es wichtig, dass die Kinder dieses Abdecken als Subtraktion interpretieren und die Darstellung »lesen« lernen. Von Vorteil ist hierbei, dass das Abdecken sowohl als Handlung von den Kindern am konkreten Material oder an Punktefeldern ausgeführt werden kann und in gleicher Weise dargestellt wird.

Welches sind die zentralen Aufgaben, die Kinder auf diese Weise mit der Folie darstellen sollen? Langfristig sollen alle Kinder alle Aufgaben des Einsminuseins gedächtnismäßig verfügbar haben, doch zentral sind die sogenannten »einfachen« Aufgaben. Unter einfachen Aufgaben im Anfangsunterricht verstehen Wittmann und Müller (2005) Aufgaben mit Subtrahend 1, 5 und 10, 15, 20, 25, 30 usw., also Aufgaben, welche die Kraft der 5 oder die Kraft der 10 ausnutzen oder bei denen nur einer subtrahiert wird, und die entsprechend als trivial gelten. Als einfache Aufgabe werden ebenfalls Subtraktionsaufgaben deklariert, die eine Zerlegung von 10 thematisieren ($10 - 3 = 7$) oder auf den Zehner zurückgehen ($12 - 2 = 10$). Beherrschen Kinder diese »einfachen« Subtraktionsaufgaben, können sie alle weiteren Aufgaben aus diesen ableiten (vgl. Förderidee 8).

diagnosegeleitet und differenziert

Aus dieser Aufschlüsselung einfacher und schwieriger Aufgaben ergeben sich automatisch Differenzierungs- und Diagnosemöglichkeiten.

Lehrkräfte können im Hinblick auf die Subtraktionsfertigkeiten der Kinder darauf achten,

- welche einfachen Aufgaben Kinder bereits gedächtnismäßig verfügbar haben,
- welche schwierigen Aufgaben sie aus einfachen ableiten,
- inwieweit sie Aufgaben zählend lösen oder die Mengen quasi-simultan erfassen,
- welche Aufgaben von den Kindern als einfach bezeichnet werden.

Arbeiten Kinder im Unterricht mit Folie und Punktefeld, kann eine Aufgabe darin bestehen, »einfache« Subtraktionsaufgaben zu finden, darzustellen und zu notieren. Dabei können Lehrkräfte beobachten, welche Aufgaben die Kinder als einfach ansehen und auswählen.

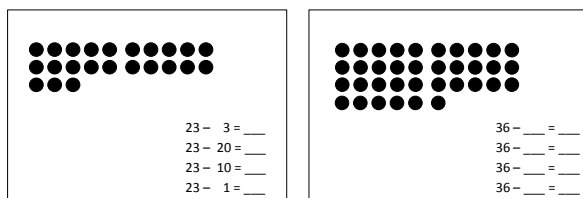


Abb. 16: »Finde einfache Subtraktionsaufgaben!«

Leistungsstärkere Kinder können möglicherweise auch Aufgaben finden, die nicht den oben beschriebenen Typen entsprechen. Zur Kommunikation über die Aufgaben sollte jedoch ein Kriterium als zentral herausgegeben werden: »Einfache« Subtraktionsaufgaben sind Aufgaben, bei denen man das Ergebnis schnell sehen kann. Gerade für leistungsschwächere Kinder muss neben dem Aufbau einer Subtraktionsvorstellung darauf geachtet werden, dass keine abzählenden Strategien verfestigt werden können. Vom Zahlenmaterial her kann eine Differenzierung so vorgenommen werden, dass jüngere oder leistungsschwächere Kinder Punktkarten erhalten, die zunächst im Zahlenraum bis 20 sind.

kooperativ und kommunikativ

Der Austausch von Kindern, das Erkennen und Darstellen von Subtraktionsaufgaben wird gefördert, indem Kinder abwechselnd Aufgaben an einer Karte abdecken und ablesen.

Ebenso können von einzelnen Kindern gefundene »einfache« Subtraktionsaufgaben miteinander verglichen werden. Im Klassengespräch können die als einfach erkannten Aufgaben an der Tafel notiert und mit Namen versehen werden. Damit wird zum einen die Ähnlichkeit zwischen den Aufgaben » $16 - 10 = \underline{\quad}$ «; » $36 - 10 = \underline{\quad}$ « herausgestellt, zum anderen erhalten die Kinder mit dem neuen Begriff auch wieder eine sprachliche Fassung einer Handlung, die zur Verinnerlichung und Vorstellung beitragen kann.

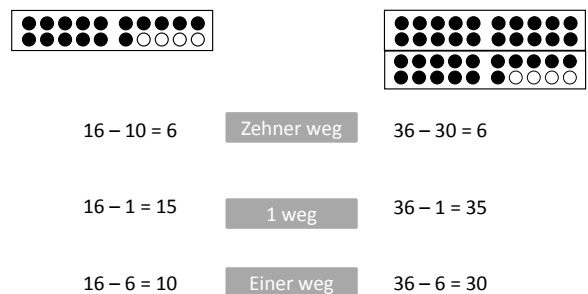


Abb. 17: Zusammengetragene »einfache« Subtraktionsaufgaben

6b Förderidee: Vorstellungen zur Subtraktion entwickeln – in der Grundvorstellung »Ergänzen«

Das Ergänzen ist neben dem Abziehen die zweite Grundvorstellung der Subtraktion. Hierbei wird nicht der Rest, sondern die Differenz zwischen Minuend und Subtrahend bestimmt. Diese findet sich sowohl in Schulbüchern als auch in Vorgehensweisen der Kinder deutlich seltener (vgl. Selzer 2000). Die Grundvorstellung des Abziehens scheint stärker ausgeprägt, sodass das Ergänzen in den Hintergrund gerät und bei der Lösung von Subtraktionsaufgaben als Vorgehensweise von Kindern selten verwendet wird. Dies kann auch beobachtet werden, wenn eine Aufgabe wie z. B. $81 - 79 = \underline{\quad}$ durch Ergänzen wesentlich geschickter zu lösen wäre als z. B. durch Abziehen von sieben Zehnern und anschließende Subtraktion von neun Einern. Die Grundvorstellung des Ergänzens ist additiv und muss erst von den Kindern mit der Subtraktionsaufgabe in Verbindung gebracht werden. Kinder müssen demnach beim Ergänzen zunächst den Transfer zwischen dem durch das Minuszeichen evtl. nahegelegtem Abziehen zur Ergänzungsaufgabe vollziehen.

beziehungsreich und verstehensorientiert

Die additive Vorstellung des Ergänzens wird aufgegriffen, wenn Ergänzungsaufgaben in der Form $79 + _ = 81$ präsentiert werden (vgl. Schütte 2004; Wittmann/Müller 2006). Auch der Rechenstrich legt diese Interpretation des Ergänzens nahe (vgl. Abb. 18, indem das Ergänzen als »Sprung« von einer zur anderen Zahl gedeutet wird). Interessant ist es, wenn Kindern Aufgaben mit beiden Grundvorstellungen vorgelegt werden. Was haben die Aufgaben miteinander zu tun? Welche Aufgabe ist leichter zu lösen? Bei welchen Aufgaben bietet sich welche Vorstellung an?



Abb. 18: Subtraktionsvorstellungen

Gelingt es Kindern, die Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgaben zu sehen, verfügen sie bereits über eine elaborierte, flexible Vorstellung. Viele Kinder müssen jedoch zunächst eine Vorstellung von Ergänzen aufbauen. Hier ist es nicht ausreichend, verwandte Aufgaben wie z. B. Umkehraufgaben zu thematisieren, da diese auf rein symbolischer Ebene gelöst werden können.

Welche Handlung beschreibt jedoch das Ergänzen so, dass diese von Kindern ausgeführt werden kann und trotzdem eine verallgemeinerbare Vorstellung anregt? Eine Möglichkeit ist die Vorstellung: »einen passenden Streifen finden«. Hier sollen Kinder Zahldarstellungen im Punktfeld mit Streifen ergänzen (vgl. Abb. 19). Dies eignet sich vor allem für das Ergänzen zum Zehner. Die Kinder werden aufgefordert, mental oder durch konkretes Legen von Streifen bis zum nächsten Zehner zu ergänzen, wobei entscheidend ist, dass eine Menge betrachtet wird. Die Punkte werden nicht einzeln hinzugelegt, bis der Zehner erreicht ist, sondern als ganzer Streifen. Dies verhindert, dass Kinder z. B. mental oder beim Ergänzen einzelner Punkte in Einerschritten weiterzählen, bis die gesuchte Zahl (der Zehner) erreicht ist.

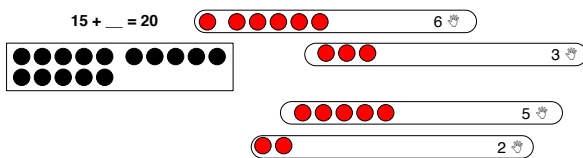


Abb. 19: Ergänzen zum Zehner in der Vorstellung »Welcher Streifen passt?«

diagnosegeleitet und differenziert

Entsprechend der Vorstellungen der Kinder können im Unterricht verschiedene Aufgaben zu dem Material gestellt werden. Leistungsschwächere Kinder finden durch Ausprobieren verschiedener Streifen den passenden Streifen zu einer vorliegenden Zahldarstellung. Für denselben Streifen suchen leistungsstärkere Kinder passende Zahlen, sodass beim Ergänzen mit diesem Streifen stets der Zehner erreicht wird, z. B. 15, 25, 35, 45, 55, aber auch 105 oder 1005.

Dabei kann eine Differenzierung darin bestehen, mit konkreten Streifen und Zahldarstellungskarten zu arbeiten oder anhand von Zahldarstellungskarten mental zu ergänzen. Ebenso wird die Schwierigkeit der Aufgabe durch veränderte Ausgangszahlen bestimmt.

- Lehrkräfte sollen bei den Aktivitäten der Kinder darauf achten,
- wie diese ihr Vorgehen bei einer Ergänzungsaufgabe beschreiben und welche Vorstellung dabei sichtbar wird,
- ob Kinder in Schritten zum »Ziel hochzählen«,
- inwieweit Ergänzungsaufgaben zu beliebigen Zahlen durchgeführt werden können,
- inwiefern die »Kernaufgaben« des Ergänzens zu 10 automatisiert sind.

kooperativ und kommunikativ

Bei der Entwicklung von Vorstellungen ist es auf der einen Seite wichtig, dass die Kinder für sich Handlungsvorstellungen aufbauen und zunächst einmal auf ihrem Niveau arbeiten. Der Austausch mit anderen ist auf der anderen Seite wichtig, um die eigenen Vorstellungen zu erläutern, aber auch zu überprüfen bzw. mit den Vorstellungen anderer zu vergleichen und somit die eigenen zu erweitern.

In einem kooperativen Setting finden Kinder zunächst allein Ergänzungsaufgaben. Gemeinsam mit einem Partnerkind wird dann verglichen, welche Karten (Zahlen) zu einem Streifen gefunden wurden, welche Ergänzungsaufgaben also die gleiche Differenz haben. Anschließend überlegen Kinder gemeinsam, welche anderen Zahlen auch mit dieser Differenz zu einem Zehner ergänzt werden können.

Eine weitere Möglichkeit ist, die Aufgaben nach dem Ergebnis zu sortieren. Die Kinder können aufgefordert werden, alle Ergänzungsaufgaben zu einem Zehner zu finden (z. B. $21 + _ = 30$; $22 + _ = 30$; $23 + _ = 30$ usw.) und zu begründen, wie viele Aufgaben es bei jedem Zehner geben muss.

Zahlenrechnen

Der Begriff des Zahlenrechnens ist nicht selbsterklärend, da umgangssprachlich betrachtet in der Mathematik immer mit Zahlen gerechnet wird. Im Sinne des Lehrplans (in Nordrhein-Westfalen 2008) meint Zahlenrechnen das Rechnen unter Ausnutzung von Zahlbeziehungen, Zerlegungsstrategien und Rechengesetzen, also geschicktes und flexibles Rechnen mit Zahlen in der Abgrenzung zum algorithmischen Rechnen mit Ziffern bei den schriftlichen Rechenverfahren.

Beim Zahlenrechnen geht es also darum, die eigene Zahl- und Operationsvorstellung so zu nutzen, dass schwierige Aufgaben auf einfache zurückgeführt oder durch Anwendung von mathematischen Rechengesetzen vereinfacht werden. Dies erfolgt in der Schuleingangsphase natürlich nicht formell, sondern implizit, jedoch durchaus mit

dem Anspruch zu erklären und zu begründen, warum Beziehungen genutzt werden können.

Zur Verdeutlichung ein Beispiel: die Aufgabe $19 - 11$ kann unter Ausnutzung des Assoziativgesetzes auf $19 - (10 + 1) = 19 - 10 - 1$ zurückgeführt werden oder aufgrund des Gesetzes von der Konstanz der Differenz auf die Aufgabe $18 - 10 = (19 - 1) - (11 - 1)$. Während Lehrerinnen und Lehrer die hinter den »Rechentricks« stehenden Gesetze kennen sollten, ist es für Kinder entscheidend, diese am Material zu zeigen und zu begründen (vgl. Abb. 20).



Abb. 20: Darstellung der $19 - 11$ unter Ausnutzung von Rechengesetzen

Während leistungsstärkere Kinder von sich aus geschickte Strategien wählen, verbleiben leistungsschwächere Kinder oft bei einem Vorgehen, welches sie immer wieder anwenden, und zeigen zunächst einmal wenig flexible Strategien (vgl. Gaidoschik 2010). Das bedeutet jedoch nicht, dass sie nicht in der Lage wären, diese zu erlernen oder anzuwenden, wenn explizit nach geschicktem Vorgehen gefragt. Die Fähigkeit, Aufgabenstellungen nicht zählend zu bearbeiten, erfordert von den Schülerinnen und Schülern, dass sie einerseits operative Zusammenhänge erkennen und nutzen, andererseits aber auch reichhaltiges Zahlenwissen aufgreifen. Gerade die aktive Konstruktion von Beziehungen zwischen Aufgaben und die Nutzung mathematischer Strukturen im Kontext der Auseinandersetzung mit »strukturierten Übungen« (Wittmann 1992) entlastet die Gedächtnistätigkeit, da nicht mehr jede Aufgabe für sich alleine steht und bearbeitet werden muss. Zudem ebnet die mathematischen Erkenntnisse einen Weg, um sich langfristig von verfestigten Zählstrategien zu lösen. Schütte (2008) spricht in diesem Zusammenhang davon, dass die Kinder vor der Bearbeitung der Aufgaben einen »Zahlenblick« einnehmen sollten. Darunter versteht sie im engeren Sinne die Fähigkeit, Aufgabeneigenschaften zu erkennen und Aufgabentypen voneinander zu unterscheiden, Zahlen ebenso wie Aufgaben in Beziehung zueinander zu setzen und Wege der Vereinfachung zu finden sowie letztlich auch Lösungen von (Teil-) Aufgaben automatisiert zu wissen. Da aber gerade Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten diesen Blick auf strukturelle Zusammenhänge nicht von sich aus automatisch und sofort einnehmen, sollten »insbesondere strukturierte Übungen zentraler Bestandteil des Unterrichts und der Förderung sein« (Scherer/Moser Opitz 2010, S. 69).

Solche strukturierten Übungen basieren auf operativen Zusammenhängen, die sich aus strukturellen Regelmäßigkeiten des dezimalen Zahlensystems und elementarer Rechengesetze – wie das Kommutativ-, das Assoziativ- oder das Distributivgesetz sowie auch Konstanzgesetze – ergeben. Für die Kinder geht aber nicht um das begriffliche Kennenlernen der mathematischen Gesetzmäßigkeiten, sondern um Einsichten in die Operation: Wie kann man Aufgabenstellungen geschickt und flexibel unter Ausnutzung der strukturellen Zusammenhänge lösen (vgl. Krauthausen/Scherer 2003, S. 22)?

Schipper (2005, S. 33f.) listet hierzu die wesentlichen Strategien des Zahlenrechnens auf, die im ersten und zweiten Schuljahr zum Einsatz kommen können.

1. Schuljahr		2. Schuljahr	
1. Das Verdoppeln bzw. Halbieren nutzen			
$6 + 8 = 14$ aus »doppel-sechs plus zwei«	$14 - 6 = 8$ aus $14 - 7 = 7$ $7 + 1 = 8$	$25 + 28 = 53$ aus »doppel-fünfund- zwanzig plus drei«	$50 - 26 = 24$ aus $50 - 25 = 1$
2. Gegen- bzw. gleichsinniges Verändern			
$6 + 8 = 14$ aus $(6 + 1) + (8 - 1)$ = »doppel-sieben«	$12 - 7 = 5$ aus $(12 - 2) - (7 - 2)$ = $10 - 5$	$34 + 58 = 92$ aus $(34 - 2) + (58 + 2)$ = $32 + 60$	$76 - 28 = 48$ aus $(76 + 2) - (28 + 2)$ = $78 - 30$
3. Analogien nutzen			
$13 + 4 = 17$ weil $3 + 4 = 7$	$19 - 6 = 13$ weil $9 - 6 = 3$	$30 + 40 = 70$ weil $3 + 4 = 7$	$80 - 50 = 30$ weil $8 - 5 = 3$
4. Hilfsaufgaben nutzen			
$6 + 8 = 14$ aus $6 + 10 - 2$	$16 - 9 = 7$ aus $16 - 10 + 1$	$34 + 58 = 92$ aus $34 + 60 - 2$	$76 - 28 = 48$ aus $76 - 30 + 2$
5. Schrittweises Rechnen (Zerlegen des zweiten Summanden bzw. des Subtrahenden)			
$6 + 8 = 14$ aus $6 + 4 + 4$	$14 - 6 = 8$ aus $14 - 4 - 2$	$34 + 58 = 92$ aus $34 + 50 + 8$	$76 - 28 = 48$ aus $76 - 20 - 8$
6. Stellenwerte extra			
		$34 + 58 = 92$ aus $30 + 50 = 80$ $4 + 8 = 12$ $80 + 12 = 92$	$76 - 28 = 48$ aus $70 - 20 = 50$ $6 - 8 = -2$ $50 + (-2) = 48$

Abb. 21: Geschicktes Rechnen (aus Schipper 2005, S. 33f.)

Natürlich gibt es daneben noch weitere Mischformen und individuelle Varianten. »Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule ist es, die Kinder zu befähigen, aus dem in der Tabelle dargestellten Repertoire an Verfahren flexibel das jeweils optimale – abhängig von den zu verrechnenden Zahlen – auszuwählen« (Schipper 2005, S. 33). Auch wenn einige Kinder mit Lernschwierigkeiten von diesem Ziel weit entfernt sind, kann es nicht das didaktische Ziel des Unterrichts sein, diesen Kindern lediglich eine Strategie beizubringen. Vielmehr geht es darum, dass auch die Kinder, die beispielsweise noch verfestigt zählend rechnen, einen Zugang zur Erkundung von Ableitungsstrategien erhalten, um grundlegende Zusammenhänge verstehen und nutzen zu lernen. Wenn diese

Kinder in der Lage sind, erste grundlegende Strategien zu verwenden und zu verstehen, sind sie auf dem Weg, sich vom zählenden Rechnen zu lösen.

Am Beispiel der Arbeit mit zwei Anschauungsmaterialien – Rechenstrich und Punktefeld – sollen im Weiteren Möglichkeiten der Erkundung von Beziehungen zwischen verwandten Aufgaben dargestellt werden.

7 Förderidee: Flexibles Rechnen am Rechenstrich

Bevor der Rechenstrich eingesetzt werden kann, um daran verwandte Aufgaben darzustellen oder geschicktes Rechnen zu dokumentieren, müssen Kinder die Funktion und die Möglichkeiten der Darstellung von Aufgaben am Rechenstrich erlernen. Dabei kommt es nicht darauf an, möglichst in einem Bogen zum Ergebnis zu gelangen, sondern die Teilaufgaben so zu wählen, dass diese leicht zu berechnen sind, bspw. indem in mehreren kleinen Schritten vorgegangen wird oder indem zunächst zum nächsten Zehner ergänzt oder vermindert wird (vgl. Abb. 22). Möglich ist auch, eine analoge einfache Aufgabe zur Hilfe zu nehmen (vgl. Abb. 23). Hierbei ist es entscheidend, Kindern deutlich zu machen, dass der Rechenstrich nur dann eine Hilfe bei der Lösung von Aufgaben ist, wenn die gezeichneten Bögen so gewählt werden, dass die Teilaufgaben einfach zu lösen sind. Kinder, die mit dem Rechenstrich nicht vertraut sind, neigen dazu, ihn (nachträglich) als Dokumentation der Lösung zu benutzen. Analog zum zu berechnenden Zahlensatz werden dann die Zahlen an den Rechenstrich gezeichnet. Der Summand bzw. Minuend wird i. d. R. in einem großen Bogen dargestellt. Deshalb gilt wie bei allen Materialien auch für den Rechenstrich: Die Darstellung von Aufgaben muss zunächst von den Kindern erlernt werden, damit sie dann – vertraut damit – das Potenzial nutzen können.

$24 + 8 =$

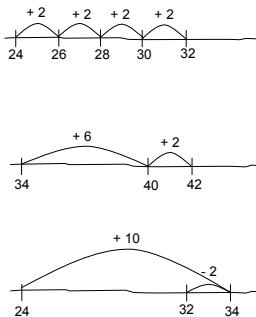


Abb. 22: Unterschiedliche Vorgehensweisen am Rechenstrich (aus Häsel-Weide 2011)

beziehungsreich und verstehensorientiert

Wenn Kinder nicht von sich aus Beziehungen zwischen unterschiedlichen Aufgaben herstellen, ist es sinnvoll, zentrale verwandte Aufgaben vergleichend zu behandeln. Ausgangspunkt sollten einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben sein (vgl. Förderidee 5), die dann mit einer schwierigeren Aufgabe verglichen werden (vgl. Abb. 22). Das Erkennen von Beziehungen zwischen Aufgaben ist der erste Schritt auf dem Weg zum geschickten Rechnen. Erst wenn Kinder die Beziehung zwischen einer einfachen und einer schwierigeren Aufgabe erkennen, können sie in der Folge die einfache Aufgabe bei der Lösung zur Hilfe heranziehen, d. h. damit Kinder erkennen, dass ihnen die Aufgabe $58 - 10$ bei der Lösung der Aufgaben $58 - 9$ hilft, müssen sie zunächst erkennen, welche Beziehung zwischen den Aufgaben besteht. Dazu kann die vergleichende Darstellung am Rechenstrich eine Hilfe sein.

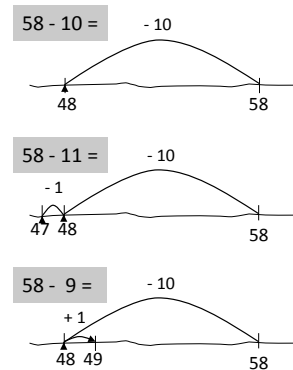


Abb. 23: Darstellungen von verwandten Aufgaben am Rechenstrich

diagnosegeleitet und differenziert

Gerade die Darstellung von Subtraktionsaufgaben macht Kindern häufig Schwierigkeiten, da die Zahlen in umgekehrter Reihenfolge zum Zahlensatz am Rechenstrich notiert werden. Deshalb ist es wichtig, dass die Kinder sowohl mit der Verortung von Zahlen am Rechenstrich vertraut sind (vgl. Förderidee 1), als auch die Darstellung einer Subtraktion als Rückwärts Pfeil explizit erlernt haben. Im Rahmen der Differenzierung bietet es sich an, die von leistungsschwächeren Kindern zu lösenden Aufgaben zunächst auf eine Operation zu beschränken oder eine Zahlbeziehung z. B. $+/- 10$ als Hilfe für $+/- 9$. Dabei sollten die Aufgaben immer noch so herausfordernd sein, dass Kindern die Hilfe durch die einfachen verwandten Aufgaben deutlich wird. Stellen die schwierigen Aufgaben keine Herausforderung mehr dar, kann der Auftrag für die Kinder auf die Prozessebene gehoben werden – Aufgabe kann sein, eine geeignete Darstellung zu finden, um die Ana-

logie deutlich werden zu lassen, oder zu beschreiben, was die Aufgaben miteinander verbindet.

Die Darstellung der Aufgaben am Rechenstrich ermöglicht Lehrkräften einen Einblick darin, wie Kinder den Summanden bzw. Minuenden zerlegen, welche kleineren oder größeren Schritte sie zu gehen vermögen und welche (geschickten) Zerlegungen von ihnen vorgenommen werden.

Lehrkräfte können bei der Analyse darauf achten,

- welche Zerlegungen die Kinder vornehmen,
- ob Kinder die Rechenrichtung einhalten,
- inwieweit Aufgaben auf »einfache« Aufgaben zurückgeführt werden,
- inwieweit Aufgaben in der Kombination aus Addition und Subtraktion gebildet werden,
- welche Zusammenhänge die Kinder zwischen analogen Aufgaben sehen und ob sie diese darstellen können.

kooperativ und kommunikativ

Für das Erkennen der Analogie der Aufgaben ist das Beschreiben und Begründen der Zahlbeziehungen, der ausgenutzten Rechengesetze und der Zerlegungen zentral. Dies kann beim Vergleich von Darstellungen am Rechenstrich zwischen den Kinder geschehen oder anhand von ausgewählten Beispielen in der Reflexion. Auch wenn die Analogie zwischen Aufgaben wie in Abb. 23 für die Lehrkraft selbstverständlich scheint, muss dies dann nicht für alle Kinder gelten. Die Formulierung der Beziehung zwischen den Aufgaben macht den Kindern die Beziehung erst deutlich. Und nur, wenn diese Beziehungen verstanden sind, können sie im Sinne des Zahlenrechnens bei weiteren Aufgaben genutzt werden.

Neben dem Vergleich von Darstellungen ist eine Kooperation zwischen den Kindern auch möglich, indem ein Kind eine einfache Aufgabe nennt oder auf einer Karte zieht, welche von dem anderen Kind verändert werden muss. Sind die Kinder mit dem Aufgabenformat vertraut, können auch schwierige Aufgaben gezogen werden, zu denen dann die passende Hilfsaufgabe gefunden und dargestellt werden muss.

8 Förderidee: Flexibles Rechnen am Punktefeld

Mit dem 20er- bzw. 100er-Punktefeld können Kinder – ebenso wie beispielsweise auch mit einem Rechenrahmen – nicht allein Anzahlen darstellen, sondern vor allem auch Beziehungen zwischen Zahlen und eben auch Aufgaben zum Ausdruck bringen. Wesentlich ist hierbei ein Verständnis des Materials als »Erkenntnismittel« und weniger ausschließlich als »Hilfsmittel«. Es geht eben nicht allein darum, auf dem Punktefeld Plättchen zu legen und zu verschieben, um auf eine Lösung zu kommen. Vielmehr sollen Handlungen am Punktefeld vorgenommen werden, die es allen Kindern ermöglichen, weitere Einsichten in strukturelle Zusammenhänge zu »sehen« (s. Förderidee 5 und Abb. 23): Welche Beziehungen können untersucht werden? Wie kann aus der einen Aufgabe eine andere über das »Dazulegen, Umlegen oder Wegnehmen« konstruiert werden? Was passiert, wenn weitere Plättchen (einzelne, Fünfer, Zehner) hinzu- oder wegkommen?

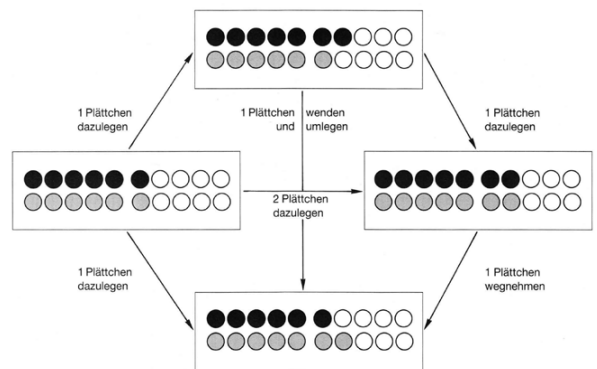


Abb. 24: Darstellung von verwandten Aufgaben am 20er-Feld (aus Wittmann & Müller 1990, 46)

Söbbeke und Steinbring (2007) betonen in diesem Zusammenhang, dass zwar die Struktur der Darstellung elementare Einsichten ermöglicht; diese allerdings nicht direkt ablesbar oder konkret sinnlich erfahrbar sind. Wesentlich ist, dass die strukturellen Zusammenhänge von dem Kind aktiv in die Darstellung hineingedeutet werden.

beziehungsreich und verstehensorientiert

Zentrale verwandte Aufgaben sind – wie zu Förderidee 7 bereits ausgeführt – einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben, die mit einer schwierigeren verbunden werden können. Hierbei steht im Mittelpunkt, dass die Kinder zum einen – wie in Förderidee 5 beschrieben – einfache Aufgaben zu schwierigeren verändern, zum anderen aber in einer schwierigeren Aufgabe die Struktur der einfacheren Aufgabe erkennen und diese nutzen. Hilfreich sind hier zunächst Übungen, die Kinder anregen, Unterschiede zwischen Aufgaben in den Blick zu nehmen und diese nach spezifischen Kriterien zu ordnen und zu sortieren (leichte oder schwere Aufgaben – Aufgaben mit »Kraft der 5«, »Kraft der 10« oder »Kraft der Doppelzahl« – verwandte Aufgabenpaare ...) (vgl. Nührenbörger/Pust 2006; Rathgeb-Schnierer 2004). Hierbei dient das Punktefeld den Kindern als Orientierung und vor allem auch als Argumentationsbasis, um sich für eine einfachere Aufgabe zu entscheiden und um daraus die schwierigere verwandte Aufgabe abzuleiten.

Kreuze die leichteste Aufgabe an!
Rechne diese zuerst!



$17 - 9 = \underline{\quad}$

$17 - 10 = \underline{\quad}$

Abb. 25: Verwandte Subtraktionsaufgaben

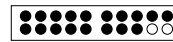
Dieses Aufgabenformat fordert die Kinder im Sinne des Zahlenblicks auf, beide Aufgaben zu betrachten und zu entscheiden, welches die einfachste Aufgabe ist. Die schwierigere Aufgabe kann dann aus der einfachen abgeleitet werden. Diese Art der Analogiebildung gelingt bei aufeinanderfolgenden Zahlen bei der Addition auch leistungsschwächeren Kindern. Bei der Subtraktion zeigen diese Kinder jedoch häufig Schwierigkeiten, da sie analog zur Addition folgern, dass aus der Erhöhung des Subtrahenden auch eine Erhöhung des Ergebnisses folgt. Bei der Subtraktion führt jedoch die Erhöhung des Subtrahenden zu einer Verminderung der Differenz. Es findet eine gegensinnige Veränderung statt. Diese Vorstellung kann mit Hilfe der Darstellung der Subtraktion durch die durchsichtige Folie angeregt werden (vgl. Förderidee 6): Durch Verschieben der Folie wird deutlich, dass die Erhöhung des Subtrahenden zu einer Verminderung der Differenz bzw. die Verminderung des Subtrahenden zu einer Erhöhung der Differenz führt.

diagnosegeleitet und differenziert

Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sehen jedoch oftmals keine Unterschiede zwischen einer strukturell leichteren und schwierigeren Aufgabe, da beide Aufgaben – wenn sie zählend gelöst werden – ähnliche Anforderungen stellen. Insofern ist es wichtig, dass die Kinder aufgefordert werden, explizit zunächst eine leichtere zu identifizieren und mit dieser Aufgabe die andere Aufgabe lösen (vgl. Abb. 25). Gerade die Eigenproduktionen liefern der Lehrkraft wertvolle Hinweise über die Fähigkeit der Kinder, eine passende verwandte Aufgabe zu produzieren, die auf Grund ihrer strukturellen Merkmale leichter oder schwieriger ist.

Im Rahmen der Differenzierung bietet es sich an, die Punktefelder für manche Kinder zu erweitern, die strukturellen Beziehungen zu variieren oder aber die Aufgabenpaare um weitere Terme (z. B. $18 - 8$, $18 - 9$ und $28 - 8$, $28 - 9$ oder aber $18 - 9$ wird verglichen mit $18 - 8$ und $18 - 10$) zu ergänzen. Hingegen sollten die leistungsschwächeren Kinder Zeit haben, gerade auch die zentralen leichten Aufgaben – z. B. immer zum Zehner zurück – zu erkunden. Hierbei kann weiterhin die bereits im Abschnitt zu Förderidee 6 erwähnte leicht durchsichtige Folie eine Möglichkeit sein, die Unterschiede zwischen einer leichten und schwierigen Aufgabe zu verdeutlichen – auch wenn natürlich die Entscheidung für leicht und schwer von individuellen Kompetenzen und auch persönlichen Erfahrungen mit Vorgehensweisen abhängt: Bei einer leichten Aufgabe kann man in der Regel den Subtrahend auf einen Streich abdecken.

Welche Aufgabe hilft dir?



$18 - 9 = \underline{\quad}$

$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

Abb. 26: Aufgaben zur Eigenproduktion

Lehrkräfte können im Hinblick auf die verwandten Subtraktionsaufgaben darauf achten,

- welche Aufgaben als »einfache« ausgewählt werden,
- inwiefern die »schwierigen« Aufgaben mit Blick auf die einfachen gelöst werden,
- woran die Kinder die Unterschiede zwischen den Aufgaben kenntlich machen,
- wie die Kinder die Aufgaben im Punktefeld sehen.

kooperativ und kommunikativ

Die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Sichtweisen auf »einfache« und »schwierige« Aufgaben fordert die Kinder heraus, ihre eigene mathematische Sichtweise bewusst einzunehmen und zu begründen. Dies kann in der Reflexionsphase beim Vergleich der Aufgabenbearbeitungen der Kinder geschehen. Es bietet sich auch an, unterschiedliche passende »einfache« Aufgaben zu einer schwierigen Aufgabe zu diskutieren, z. B. $18 - 8$, $18 - 10$ oder $19 - 9$ als passende einfache Aufgaben zur schweren Aufgabe $18 - 9$. Leistungsstärkere Kinder können herausgefordert werden, mehrere passende Aufgaben zu finden, leistungsschwächere Kinder erleben alternative Vorschläge zu ihrer Lösung. Allerdings ist es auch denkbar, dass bereits während der Arbeitsphase die Kinder miteinander kooperieren, indem sie zunächst alleine Aufgabenpaare wie in Abb. 24 und 25 bearbeiten, um sich anschließend zu zweit zu treffen und ihre Bearbeitungen zu vergleichen sowie die Ähnlichkeiten und Unterschiede schriftlich gemeinsam festzuhalten. Anschließend können gemeinsam einfachere Subtraktionsaufgaben zu vorgegebenen Termen gefunden werden.

Fazit

Die Förderung von leistungsschwächeren Kindern ist eine zentrale Aufgabe des regulären Mathematikunterrichts. Für einzelne Schülerinnen und Schüler mag darüber hinaus eine weitere individuelle, möglicherweise sogar außerschulische Förderung notwendig sein. Dies entlastet jedoch die Mathematiklehrkraft nicht von der Verantwortung, den Unterricht so zu gestalten, dass alle Kinder angeregt und unterstützt werden, grundlegende mathematische Vorstellungen aufzubauen. Entsprechend greifen die hier vorgestellten Aufgabenformate zentrale mathematische Strukturen auf und orientieren sich an grundlegenden Prinzipien der Mathematikdidaktik. Von dieser Ausrichtung profitieren nach Lorenz (2003) alle Kinder, im besonderen Maße jedoch die leistungsschwachen Kinder.

Die beschriebenen Aufgabenformate wurden exemplarisch für Umsetzungsmöglichkeiten einer unterrichtsintegrierten Förderung beschrieben und ausgearbeitet. Wesentlich bei der täglichen Arbeit im Mathematikunterricht ist, die Grundideen der Förderung zu beachten. Denn gerade diese Leitideen beziehungsreich und verstehensorientiert, diagnosegeleitet und differenziert sowie kommunikativ und kooperativ dienen bei der Auswahl von Inhalten und der methodischen Aufarbeitung einerseits zur Orientierung, andererseits ermöglichen sie den Kindern individuelle Förderanregungen. Allerdings garantiert auch ein noch so sorgsam vorbereiteter Mathematikunterricht nicht unbedingt Fördererfolg bei allen Kindern. Die Lehrkraft kann immer nur die Lernumgebung möglichst optimal bereiten; die Kinder mit ihren individuellen Bedürfnissen und Kompetenzen und der Verlauf des Unterrichtsgeschehens bestimmen letztendlich über die Förderung jedes einzelnen Kindes.

Literatur

- Brandt, B./Nührenbörger, M. (2009): Kinder im Gespräch über Mathematik. Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht. Die Grundschrift, 23 (222/223), S. 28–33.
- Fritz, A./Ricken, G. (2009): Grundlagen beim Förderkonzept Kalkulie. In: A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (S. 374–395). Weinheim: Beltz.
- Fuchs, M./Käpnick, F. (2004): Mathehaus 1. Berlin: Cornelsen.
- Fuson, K. C. (1987): Children's counting and concepts of number. New York: Springer.
- Gaidoschik, M. (2009): Didaktogene Faktoren bei der Verfestigung des »zählendes Rechnens«. In: A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche (S. 166–180). Weinheim: Beltz.
- Gaidoschik, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt a. M.: Peter Lang.
- Gerster, H.-D. (2009): Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In: A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche (S. 248–268). Weinheim: Beltz.
- Hanke, P. (2010): Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule. In: P. Hanke/G. Möwes Butschko/A. K. Hein/D. Berntzen/A. Thielges (Hrsg.): Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule (S. 11–25). Münster: ZfL.
- Häsel-Weide, U. (2011): »Bei dir ist es anders herum« – Muster und Strukturen für leistungsschwächere Kinder. Grundschrift (3), S. 8–11.
- Häsel-Weide, U. (2010): Lernschwache Rechner fördern. Förderschulmagazin (2), S. 8–13.
- Häsel-Weide, U./Nührenbörger, M. (2010): Sicher mit Zahlen. Grundschule aktuell (109), S. 21–24.
- Hasemann, K. (2003): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg: Spektrum.
- Hellmich, F. (2010): Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Grundschule. In: P. Hanke/G. Möwes Butschko/A. K. Hein/D. Berntzen/A. Thielges (Hrsg.): Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule (S. 185–192). Münster: ZfL.
- Hirt, U./Wälti, B. (2007): Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Seelze: Kallmeyer.
- Krajewski, K. (2005): Früherkennung und Frühförderung von Risikokindern. In: M. von Aster/J. H. Lorenz (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik (S. 150–164). Göttingen: Vadenhoeck & Ruprecht.
- Krauthausen, G./Scherer, P. (2003): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum.
- Krauthausen, G./Scherer, P. (2010): Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen. (www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf)
- Kretschmann, R. (2008): Individuelles Fördern. Von der Förderdiagnose zum Förderplan. Schulmagazin 5 bis 10 (4), 5–8.
- Lorenz, J. H. (2003): Lernschwache Rechner fördern: Ursachen der Rechenschwäche, Frühhinweise auf Rechenschwäche, Diagnostisches Vorgehen. Berlin: Cornelsen-Scriptor.
- Lorenz, J. H. (2008): Diagnose und Förderung von Kindern in Mathematik – ein Überblick. In: F. Hellmich/H. Köster (Hrsg.): Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften (S. 29–44). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Lorenz, J. H. (2009a): Zur Relevanz des Repräsentationswechsels für das Zahlenverständnis und erfolgreiche Rechenleistungen. In: A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. (S. 230–247). Weinheim: Beltz.
- Lorenz, J. H. (2009b): Der »Leere Zahlenstrahl« – eine hilfreiche Lernumgebung für die diagnostische Tätigkeit in der Grundschule. In: A. Peter-Koop/G. Lilias/B. Spindeler (Hrsg.): Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule (S. 201–211). Offenburg: Mildenerger.
- Lorenz, J. H./Radatz, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel.
- Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.
- Nührenbörger, M. (2010a): Mathematische Zusammenhänge vorausschauend deuten und rückblickend betrachten. Anregungen zum jahrgangsgemischten Mathematikunterricht in der Schuleingangsphase. Handreichungen des Programms »SINUS an Grundschulen«. (www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Nuehrenboerger.pdf)
- Nührenbörger, M. (2010b): Differenzierung und Jahrgangsmischung. In: K. Cottmann (Hrsg.): Mathematik Anfangsunterricht (S. 13–17). Seelze: Friedrich.
- Nührenbörger, M./Pust, S. (2006): Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien im differenzierten Anfangsunterricht Mathematik. Seelze: Kallmeyer.
- Nührenbörger, M./Schwarzkopf, R. (2010): Die Entwicklung mathematischen Wissens in sozial-interaktiven Kontexten. In: C. Böttinger/K. Bräuning/M. Nührenbörger/R. Schwarzkopf/E. Söbbeke (Hrsg.): Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion (S. 73–81). Seelze: Klett-Kallmeyer.
- Rathgeb-Schmierer, E. (2004): Was passiert eigentlich, wenn ...? In: Die Grundschrift (177), S. 12–16.
- Richtlinien und Lehrpläne in Nordrhein-Westfalen (2008): Lehrplan Mathematik. Frechen: Ritterbach.
- Scherer, P. (1999): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte – Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg: Edition Schindele.
- Scherer, P./Moser Opitz, E. (2010): Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.
- Schipper, W. (1995): Schulische Prävention und Intervention bei Rechenstörungen. In: Die Grundschrift, 182, S. 6–10.
- Schipper, W. (2005): Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Handreichungen des Programms »SINUS an Grundschulen«. Retrieved from www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M4.pdf.
- Schütte, S. (2004): Die Matheprofis 1. München: Oldenbourg.
- Selter, C. (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: Journal für Mathematikdidaktik (2), S. 227–258.
- Selter, C. (2006): Mathematik lernen in heterogenen Lerngruppen. In: P. Hanke (Hrsg.): Grundschule in Entwicklung. Herausforderungen und Perspektiven für die Grundschule heute (S. 118–144). Münster: Waxmann.

- Selter, C./Höhtker, B. (2006): Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl. In: E. Ch. Wittmann/G.N. Müller (Hrsg.): Mit Kindern rechnen. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule 1995, S. 122 – 137.
- Söbbeke, E./Steinbring, H. (2007): Anschauung und Sehverstehen – GrundschulKinder lernen im Konkreten das Abstrakte zu sehen und zu verstehen. In: J. H. Lorenz/W. Schipper (Hrsg.): Impulse für den Mathematikunterricht (S. 62 – 68). Braunschweig: Schroedel.
- Steinbring, H. (1995): Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da. Wie Kinder im Arithmetikunterricht strategisch-strukturelle Vorgehensweisen entwickeln. In: G. N. Müller/E. C. Wittmann (Hrsg.): Mit Kindern rechnen (S. 225 – 239). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.
- Steinbring, H. (2000): Die Entstehung mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess – Folge individueller Erkenntnis oder Ergebnis einer sozialen Konstruktion? In: M. Neubrand (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2000 (S. 635 – 638). Hildesheim: Franzbecker.
- Sundermann, B./Selter, C. (2006a): Mathematik. Pädagogische Leistungskultur: Materialien für Klasse 3 und 4. Frankfurt am Main: Grundschulverband.
- Sundermann, B./Selter, C. (2006b): Beurteilen und fördern im Mathematikunterricht. Berlin: CVK.
- Vygotsky, L. (1969): Denken und Sprechen. Frankfurt am Main: Fischer.
- Walther, G., Selter, C./Neubrand, J. (2007): Die Bildungsstandards Mathematik. In: G. Walther/M. van den Heuvel-Panhuizen/D. Granzer/O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 16 – 41). Berlin: Cornelsen.
- Wielpütz, H. (2010): Qualitätsanalyse und Lehrerbildung. In: C. Böttinger/K. Bräuning/M. Nührenböcker/R. Schwarzkopf/E. Söbbeke (Hrsg.): Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion. Seelze: Klett-Kallmeyer.
- Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (61), S. 37 – 46.
- Wittmann, E. C. (1992): Üben im Lernprozess. In: E. C. Wittmann/G. N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen (S. 175 – 182). Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. C. (1995a): Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht. In: G. N. Müller/E. C. Wittmann (Hrsg.): Mit Kindern rechnen (S. 10 – 42). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.
- Wittmann, E. C. (1995b): Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: K. P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 528 – 531). Hildesheim: Franzbecker.
- Wittmann, E. C. (2010): Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule – vom Fach aus. In: P. Hanke/G. Möwes Butschko/A. K. Hein/D. Berntzen/A. Thielges (Hrsg.): Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule (S. 63 – 78). Münster: ZfL.
- Wittmann, E. C./Müller, G. N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. C./Müller, G. N. (2005): Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Leipzig: Klett.
- Wittmann, E. C./Müller, G. N. (2006): Das Zahlenbuch. Mathematik im 2. Schuljahr. Leipzig: Klett.
- Wollring, B. (1999): Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In: C. Selter/G. Walther (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science (S. 270 – 276). Stuttgart: Klett.