Verstehensgrundlagen aufarbeiten im Mathematikunterricht

Fokussierte Förderung statt rein methodischer Individualisierung

Wie lässt sich ein Bildungsminimum im Fach Mathematik erreichen? Da das Fach kumulativ strukturiert ist, müssen gezielt die relevanten Verstehensgrundlagen gesichert werden. Anhand von Fallbeispielen erläutern die Autorinnen, wie das funktionieren kann. Sie plädieren für eine fokussierte Förderung auf fachdidaktisch empirischer Grundlage und eine methodisch geschickte Einbindung in den Unterricht.

Susanne Prediger/Andrea Schink

Nicht alle deutschen Schülerinnen und Schüler erreichen ein mathematisches Bildungsminimum: So rechneten 2012 laut IQB-Leistungsvergleich der Bundesländer 25% der deutschen Neuntklässlerinnen und Neuntklässler nur auf der ersten Kompetenzstufe, verfügten also nur über rudimentäre mathematische Kenntnisse (*Pant u.a.* 2013, S. 166). Wie können diese Jugendlichen ihre Schwierigkeiten überwinden?

Individuelle Förderung als fokussierte, kommunikative Förderung

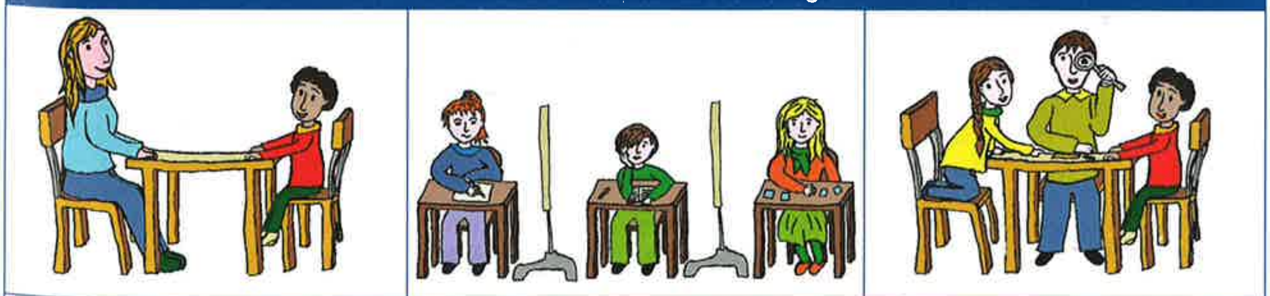
Individuelle Förderung für mathematikschwache Schülerinnen und Schüler ist aufgrund dieser Befunde zu einem zentralen Ziel geworden. Für ihre Umsetzung gibt es unterschiedliche Modelle (vgl. Abb.1):

In einigen Vorzeige-Brennpunkt-Projekten kann, bei entsprechenden Mitteln, tatsächlich mit Lernenden in Einzelbetreuung individuell gearbeitet werden. Eine solche *Eins-zu-Eins-Betreuung* ist jedoch in der Breite kaum umsetzbar.

Daher wird an vielen Schulen mit *Individualisierung auf unterrichtsorganisatorischer, methodischer Ebene* gearbeitet, zum Beispiel durch Lernbüros, Freiarbeitsstunden, Wochenpläne und Kompetenzraster. Ein komplett individualisiertes Lernen im Regelunterricht ist aus unserer Sicht allerdings nicht per se ein Qualitätsmerkmal für Förderung: Es schafft zwar einen organisatorisch-methodischen Rahmen, in dem alle Lernenden an ihren jeweiligen Lernprogrammen arbeiten können. Es ist jedoch nur so lernwirksam, wie dabei tatsächlich die jeweiligen Lernbedarfe der Lernenden *fokussiert* werden: Mit Arbeitsblättern, die anregungsarm und nicht didaktisch zielgerichtet sind, steigt der Lernerfolg nicht, auch wenn sie zu unterschiedlichen Zeitpunkten bearbeitet werden. Zudem ist Kommunikation (auch mit der Lehrkraft!) gerade für Verstehenspro-

Nicht kurzfristige Reparatur, sondern langfristiger Kompetenzaufbau ist entscheidend.

Was bedeutet individuelle Förderung?



... in der Regel nicht Eins-zu-Eins-Betreuung ...	... nicht immer methodisch individualisiertes Lernen ...	... sondern fokussierte und auch kommunikative Förderung.

Abb. 1: Drei Modelle der individuellen Förderung (Bilder © Andrea Schink)

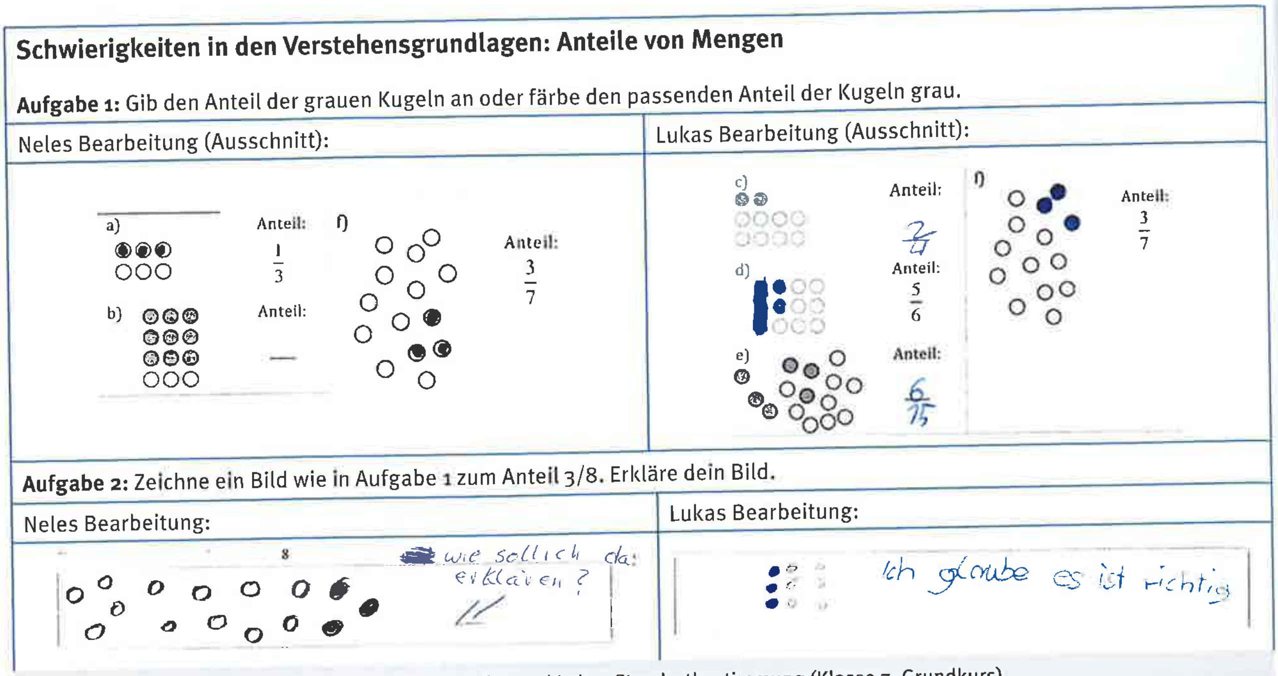


Abb. 2: Einblicke in Neles und Lukas Standortbestimmung (Klasse 7, Grundkurs)

zesse elementar und keineswegs didaktisch veraltet.

Was kann individuelle Förderung also sonst noch bedeuten? Wir stellen einen Ansatz vor, der im Projekt ›Mathe sicher können‹ für mathematikschwache Lernende erarbeitet und erprobt wurde (*Prediger u.a.* 2014). Er geht von folgenden Prämissen aus:

- *Fokussierung auf Verstehensgrundlagen:* Nicht kurzfristige Reparatur (»Ich helfe euch bei den aktuellen Hausaufgaben«), sondern langfristiger Kompetenzaufbau ist entscheidend (*Prediger u.a.* 2013). Da die meisten Schwierigkeiten im Fach Mathematik in der Sekundarstufe auf Defizite in den Verstehensgrundlagen aus vorangehenden Jahrgängen zurückzuführen sind, müssen diese fokussiert aufgearbeitet werden (*Moser Opitz* 2007).
- *Kommunikativer Austausch:* Verstehensgrundlagen erwerben schwache Schülerinnen und Schüler nicht allein im individualisierten Lernen, denn zum einen kommen häufig Leseschwierigkeiten hinzu; zum anderen brauchen Verstehensprozesse auch zeitweilig die Kommunikation mit anderen Lernenden und einer moderierenden Lehrkraft (*Hußmann u.a.* 2014).

Die Kommunikation über die handelnd gewonnenen Erfahrungen spielt eine entscheidende Rolle.

Illustrierendes Fallbeispiel: *Nele, Luka*

Nele und Luka aus dem Grundkurs einer siebten Klasse beteiligen sich nicht viel im Mathematikunterricht. Das Thema Prozentrechnung lehnen sie heftig ab. Auch im noch so guten Nachhilfeunterricht, der sich auf Prozente beschränkt, wäre das Problem nicht zu beheben.

Stattdessen lohnt ein Blick auf die Verstehensgrundlagen für Prozentrechnung, nämlich Anteile und Brüche: Wer $\frac{3}{4}$ von 12 nicht bestimmen kann, wird auch 37% von 79,95 € nicht begreifen. In einer schriftlichen diagnostischen Erhebung (wir nennen sie Standortbestimmung) kommen wir dem Problem von Nele und Luka auf die Spur: Sie können zwar einfache Anteile von einem Ganzen bestimmen (wie $\frac{3}{4}$ von einem Rechteck), doch mit Anteilen von Mengen haben sie Schwierigkeiten, die sie sogar selbst artikulieren (Abb. 2).

Das bestätigt sich in der anschließenden Förderung: Werden Nele und Luka aufgefordert, die Anteile konkret handelnd – etwa mit Plättchen – zu bestimmen, so können sie dies teilweise noch bei Zahlen wie etwa $\frac{1}{4}$ von 12. Aber schon bei etwas schwierigeren Aufgaben wie $\frac{2}{3}$ von 27 kapitulieren sie, weil die Zahlen »zu groß« sind.

Was ihnen nicht gelingt, ist das Strukturieren der 27 Plättchen in drei gleich große Mengen, von denen zwei Mengen den gesuchten Teil $\frac{2}{3}$ von 27 darstellen. Dazu müssten Nele und Luka zunächst die Division verstanden haben: Drittel bestimmt man, indem man durch 3 teilt. Dies lässt sich z. B. mit Plättchen darstellen, indem man drei gleich große Mengen mit je neun Plättchen legt. Doch diese Verstehensgrundlage aus Klasse 2 ist nicht verfügbar: »Ich weiß gar nicht, was teilen eigentlich bedeutet!«, beklagt sich Nele.

Daher müssen wir noch einen Schritt zurückgehen und mit den beiden das notwendige Multiplikations- und Divisionsverständnis erarbeiten. An strukturierten Rechteckdarstellungen (wie in Abb. 2, Aufgabe 1b) können z. B. verschiedene Multiplikationsaufgaben gefunden und mit der Umkehroperation Division verknüpft werden.

Das Beispiel von Luka und Nele – keineswegs ein Einzelfall! – zeigt, wie wichtig es ist, nicht bloß kurzfristig am aktuellen Stoff »Reparaturen« vorzunehmen, sondern in den Grundlagen so weit zurückzugehen, wie es notwendig ist: Ohne Verstehen der Division kein Verstehen der Anteile von Mengen, ohne Letzteres kein Verstehen der Prozentrechnung (*Fokussierung auf Verstehensgrundlagen*).

Fokussierte Förderung bedarf fachdidaktisch begründeter Diagnose

Die fokussierte Förderung stützt sich auf zwei Säulen:

Erstens ist in empirischen Untersuchungen und fachdidaktischen Analysen zu spezifizieren, welche Verstehensgrundlagen für das Weiterlernen in der Sekundarstufe I (Arithmetik, Algebra, Stochastik) unverzichtbar sind. Abb. 3 zeigt exemplarisch den im Projekt ›Mathe sicher können‹ erarbeiteten Katalog mit zehn Kompetenzen zu Brüchen und Prozenten.

Zweitens muss für die jeweiligen Lernenden entschieden werden, bei welchen der Kompetenzen noch welcher Förderbedarf besteht. Dazu sind alltagstaugliche diagnostische Aufgaben erforderlich, mit denen dieser ermittelt werden kann.

Daran, wie *Dominic* die Diagnoseaufgabe in Abb. 4 bearbeitet, zeigt sich z. B., dass er auch für einfache Brüche wie $\frac{1}{4}$ keine Anteile einer Menge bestimmen kann: Ihm gelingt es anscheinend nicht, die zwölf Kinder geeignet in vier Gruppen zu strukturieren. Seine Lösungen für $\frac{3}{5}$ von 30 und $\frac{2}{3}$ von 12 lassen vermuten, dass er die gegebenen Zahlen unsachgemäß miteinander verrechnet (etwa Zähler und Nenner miteinander multiplizieren). In seiner zeichnerischen Lösung deutet nichts darauf hin, dass Dominic beim Bestimmen von Anteilen sinnvoll auf Division zurückgreift.

Für alle Lernenden mit ähnlichen Schwierigkeiten in der Klasse schließt sich daher eine Förderung an, in der die Anteile von Mengen grundlegend und handlungsorientiert erarbeitet werden: Sie werden zunächst über das Verteilen von Plättchen oder anderen Gegenständen auf großen Bruchstreifen bestimmt. Die Vorstellungen, die sich dabei gewinnen lassen, werden anschließend mit der Vorstellung der Division als Bilden gleich großer Gruppen verknüpft (ausführlicher bei *Schink/Prediger* 2014).

Bruchverständnis
- **B1 A** Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen
- **B1 B** Ich kann Prozente bestimmen und darstellen
- **B1 C** Ich kann Anteile von Mengen bestimmen und darstellen

Gleichwertigkeit verstehen
- **B2 A** Ich kann gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden
- **B2 B** Ich kann gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden
- **B2 C** Ich kann Brüche und Prozente ineinander umwandeln

Brüche und Prozente ordnen
- **B3 A** Ich kann Brüche gleichnamig machen
- **B3 B** Ich kann Brüche und Prozente vergleichen und der Größe nach ordnen

Mit Brüchen rechnen
- **B4 A** Ich kann Addition und Subtraktion von Brüchen verstehen

Zwischen Brüchen und Dezimalzahlen übersetzen
- **DB** Ich kann einfache Dezimalzahlen und Brüche ineinander umwandeln

Abb. 3: Beispiel »Brüche«: Unverzichtbare Verstehensgrundlagen (*Prediger u. a.* 2014)

Verstehensorientierte fokussierte Förderung erfordert Kommunikation

Wichtig ist, dass die Lernenden tatsächlich genau das erarbeiten können, was für das Weiterlernen entscheidend ist. Dabei spielt die Kommunikation über die handelnd gewonne-

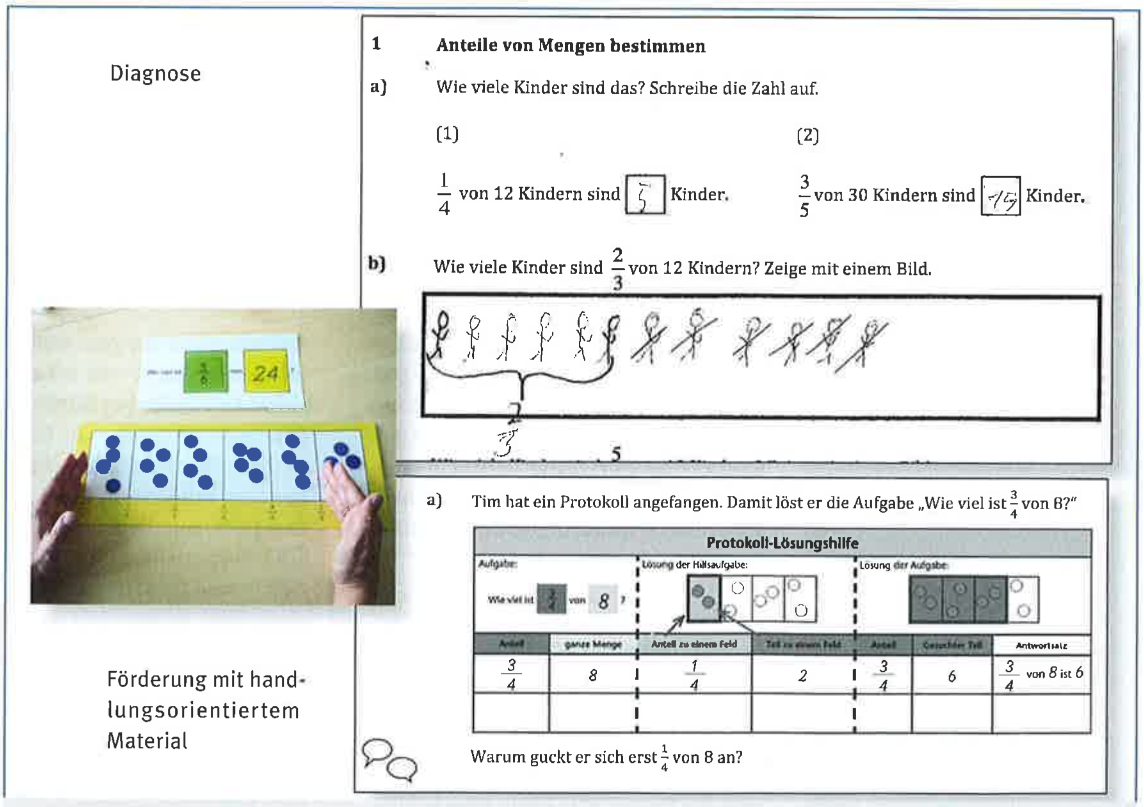


Abb. 4: Diagnoseaufgabe zur Kompetenz »Ich kann Anteile von Mengen bestimmen und darstellen« (*Schink/Prediger* 2014)

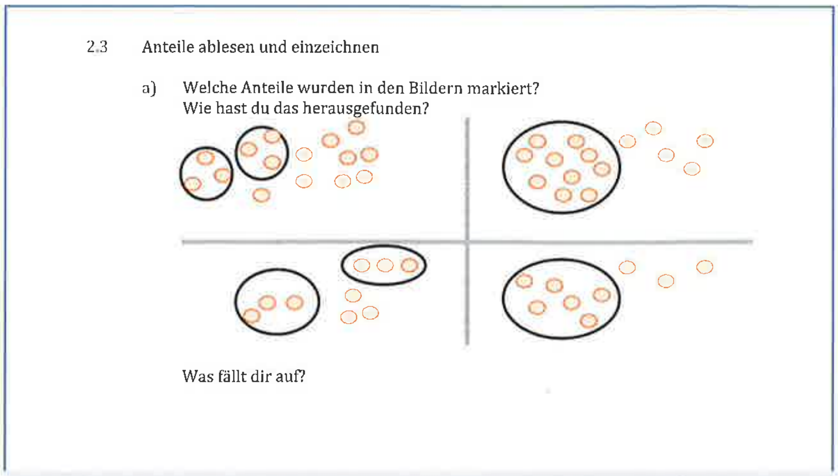


Abb. 5: Kommunikationsanlässe aus der Förderung
(Aufgabe in Vorversion zu *Schink/Prediger* 2014)

nen Erfahrungen eine entscheidende Rolle. Auch dazu ein Beispiel:

Sven (S), *David* (D) und *Nils* (N) bearbeiten gemeinsam die Aufgabe oben links in Abb. 5, in der als Anteil $^{2}/_{5}$ (oder $^{6}/_{15}$) bestimmt werden muss. Diese für die Lernenden noch ungewohnte »Umkehraufgabe« (Anteil bestimmen statt Teil bestimmen) ist für die Lernenden nicht direkt durch die bisherige Arbeit am Bruchstreifen gestützt.

David stellt sofort fest, dass in jede Gruppe 3 Plättchen gehören, dass also alle Gruppen gleich groß sein müssen. Die Jungen sehen, dass es zusammen 5 Gruppen geben muss, denn es sind 15 Plättchen insgesamt.

Es bedarf immer wieder der Moderation durch die Lehrerin, um Konflikte zu lösen.

Nils kommt auf die Lösung $^{3}/_{5}$. Seine Begründung: »In jeder Gruppe sind 3 drin und wir müssen 5 Gruppen machen«. David und Sven bestimmen den Anteil als $^{2}/_{5}$: »Aber es sind 2 Gruppen zuerst gewesen.« Nils entgegnet, »Na und? Aber du musst die anderen noch markieren.« Daraufhin schwenkt David ebenfalls auf $^{3}/_{5}$ um. Nachdem die Förderlehrerin (L) die $^{2}/_{5}$ als richtig bestätigt, ist David verwirrt: »Aber wieso $^{2}/_{5}$?«

Im Folgenden argumentieren beide Parteien weiter für ihre jeweilige Lösung. Der Vergleich mit einer vorangehenden Aufgabe, in der $^{2}/_{3}$ von 15 vorkam und die an die Handlungen am Bruchstreifen anknüpft, hilft schließlich den Konflikt zu lösen:

L: … Was haben wir denn da gemacht? 15 Plättchen gab's insgesamt – wie viele Gruppen haben wir gemacht?
D: 3.
L: Hm. Wie viele Plättchen waren in jeder Gruppe?
D: 5.
L: Steht die 5 irgendwo in dem Bruch mit drin?
D: Nein.
L: Wie kommt man denn auf die 2 von oben?
S: Weil 2 Felder markiert wurden.

Jetzt akzeptiert auch David Svens Lösung.

Das Beispiel zeigt, wie die drei Jungen im Gespräch ihre Lösungen miteinander vergleichen und argumentieren, um sich die Bedeutung der Zahlen im Zähler und Nenner klar zu machen.

Nicht alle Lernenden können von Anfang an so intensiv aufeinander eingehen, einige müssen dies erst lernen. Doch selbst wenn sie sich so gut zuhören wie diese drei, bedarf es immer wieder der Moderation und Fokussierung durch die Lehrerin, um Konflikte zu lösen. Solche Verstehensprozesse erfordern den kommunikativen Austausch.

Fokussierte und kommunikative Förderung in den Unterrichtsalltag integrieren

Gerade wenn Kommunikation für die Förderung so wichtig ist, stellt sich die Frage: Wie kann eine solche Förderung praktisch in den Unterrichtsalltag integriert werden? Folgende Modelle sind möglich:

- *Separater langfristiger Förderunterricht:* Die Kinder beziehungsweise Jugendlichen mit dem größten Förderbedarf in einem Jahrgang werden längerfristig (z. B. für ein Jahr) in einem Förderunterricht zusammengefasst und arbeiten sich dort systematisch gemeinsam durch die Diagnose- und Förderbausteine durch (mit je vier bis zwölf Lernenden). Solche separaten Förderkurse gibt es an vielen Schulen. Inhaltlich können sie mithilfe der vorliegenden Diagnose- und Fördermaterialien nun substanziell statt spontan gestaltet werden (für die Arithmetik der Klasse 5: *Selter u. a.* 2014, für die Klasse 6/7: *Prediger u. a.* 2014). Zwar wünschen sich die Lernenden zu Beginn lieber den aktuellen Reparaturbetrieb (»Warum machen wir nicht Prozente, das kommt in der Arbeit vor?!«), schnell merken sie jedoch, dass es sich lohnt, in den langfristigen Aufbau der Verstehensgrundlagen zu investieren.
- *Separater bedarfsbezogener Förderunterricht:* Die Diagnosen werden jeweils in der Gesamtklasse durchgeführt, und für je zwei bis drei Bausteine werden die Lernenden herausgezogen, die an den jeweiligen Bausteinen noch arbeiten müssen. Die Förderung findet im Kleingruppenunterricht mit je vier bis zwölf Lernenden statt.
- *Teilweise klassenintegrierte Förderung:* Nur die Erarbeitung wird in separate Fördergruppen ausgelagert, die Übungsphasen werden in die üblichen individualisierten Übungsphasen der Klassen integriert.
- *Förderung mit Ad-hoc-Kleingruppen im individualisierten Klassenunterricht:* In einem gut funktionierenden individualisierten Unterricht, in dem die meisten (stärkeren) Lernenden selbständig arbeiten können (z. B. mit den in *Prediger u. a.* 2011 vorgestellten Materialien und Konzepten), arbeiten die Schwachen der Klasse an den Fördermaterialien. Die Lehrkraft nimmt sich immer wieder zwischendurch Zeit für Kleingruppengespräche mit den in diesem Moment Betroffenen.
- *Klassenverband:* In Klassen, bei denen fast allen Lernenden die Verstehensgrundlagen fehlen, kann

das Diagnose- und Fördermaterial auch mit allen bearbeitet werden. Dies hat sich z. B. in Hauptschulklassen bewährt. Wichtig ist natürlich auch hier, genau auf die Einzelnen und das von ihnen noch zu entwickelnde Verständnis zu schauen.

Jacquelines Fazit

Mit dem Beitrag werben wir dafür, individuelle Förderung nicht als rein unterrichtsmethodische Individualisierung zu verstehen, sondern als fokussierte, d. h. fachdidaktisch und individuell treffsichere Förderung in variierenden Sozialformen.

Die Lernenden sind dafür jedenfalls dankbar, weil sie ihren Lernzuwachs sehr bewusst erleben können. Jacqueline etwa sagte ihrer Förderlehrerin: »Wenn das so im Unterricht vorkommen würde, dann hätte ich ne 2!«

Dank

Wir danken unseren Kolleginnen und Kollegen aus dem Projekt ›Mathe sicher können‹ in Dortmund (*Christoph Selter, Kathrin Akinwunmi, Theresa Deutscher, Stephan Hußmann, Corinna Mosandl, Marcus Nührenbörger, Birte Pöhler, Lara Sprenger*), der Deutsche Telekom Stiftung, die das Projekt initiiert und gefördert hat, sowie den Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern, mit denen wir in der Entwicklung und Erprobung zusammen gearbeitet haben.

Literatur

Hußmann, S./Nührenbörger, M./Prediger, S./Selter, C./Drüke-Noe, C. (2014): Schwierigkeiten in Mathematik begegnen. In: Praxis der Mathematik in der Schule 56/2014, S. 2–9

Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern

Pant, H. A./Stanat, P./Schroeders, U./Roppelt, A./Siegle, T./Pöhlmann, C. (Hg.) (2013): IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I. Münster

Prediger, S./Selter, C./Hußmann, S./Nührenbörger, M. (Hg.) (2014): Mathe sicher können – Brüche, Prozente, Dezimalzahlen. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Berlin

Prediger, S./Freesemann, O./Moser Opitz, E./Hußmann, S. (2013): Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristige Reparatur – Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 55(51)/2013, S. 12–17

Prediger, S./Hußmann, S./Leuders, T./Barzel, B (2011): »Erst mal alle auf einen Stand bringen«: Diagnosegeleitete und individualisierte Aufarbeitung arithmetischen Basiskönnens. In: PÄDAGOGIK H. 5/2011, S. 20–24

Schink, A./Prediger, S. (2014): B1 C – Ich kann Anteile von Mengen bestimmen und darstellen. In: Prediger, S. u. a.: Mathe sicher können – Brüche, Prozente, Dezimalzahlen. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Berlin, S. 38–46

Selter, C./Prediger, S./Nührenbörger, M./Hußmann, S. (Hg.) (2014): Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Berlin

Dr. Susanne Prediger ist Professorin für Mathematikdidaktik an der Technischen Universität Dortmund.
Adresse: Fakultät 1, TU Dortmund, 44221 Dortmund
E-Mail: prediger@math.uni-dortmund

Dr. Andrea Schink hat an der TU Dortmund in Mathematikdidaktik promoviert und ist jetzt Referendarin am ZfsL Oberhausen.
E-Mail: schink.andrea@online.de