

LERNCREW RUHR

Vertiefungsmodul 1: Verstehensorientierung

Ablauf



- Rechenschwierigkeiten
- Verstehensorientierung
- Zahlverständnis
- Operationsverständnis (Multiplikation)

LERN
CREW
RUHR

Fünf QuaMath-Prinzipien für guten Mathematikunterricht



Wodurch entstehen Rechenschwierigkeiten?

Wie viele Plättchen sind es?



„eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sie-, ben“

Es sind sieben.

MIA

→ Nicht tragfähiges Zahlverständnis

Erfinde eine Rechengeschichte zu $6 \cdot 5$.

Lea feiert Geburtstag.
Sie lädt 6 Freunde ein... ähm...
der Geburtstag ist in 5 Tagen.

$6 \cdot 5 = 30$

MERLE

→ Nicht tragfähiges Operationsverständnis

Wie lautet die Zahl?



Dreiundvierzig.

Vierunddreißig.

LEO

→ Nicht tragfähiges Stellenwertverständnis

Wie viel ist $5 + 4$?

1. 
„eins, zwei, drei, vier, fünf“

2. 
„fünf, sechs, sieben, acht“

3. $5 + 4$ sind 8.

ADIL

→ Zählendes Rechnen

Wo liegen bei diesen Beispielen die Schwierigkeiten der Kinder?

Zählendes Rechnen

Warum ist verfestigtes Zählen problematisch?

Grundvorstellungen zu

- **Strategien**
- **Zahlen** und
- **Operationen**

können nicht aufgebaut werden.

(Wartha & Schulz, 2012, S. 46 ff)

„Zählmethoden als alleinige oder vorwiegend praktizierte Lösungsstrategie bei Kindern über das erste Schuljahr hinaus zu tolerieren, ist unterlassene Hilfeleistung.“

(Gerster, 1994)

Verstehensorientierung

b) Erfinde eine eigene Rechengeschichte zu der Aufgabe $6 \cdot 5$.

Rechengeschichte: Anna packt 6 Bücher ins Regal, und 5 Bücher liest sie.

Frage: Wie viele Bücher sind es zusammen?

Malaufgabe: $6 \cdot 5 = 30$

Das Ergebnis bedeutet: Das sind 30 Bücher

(Serkan, 5. Schuljahr)

Was nutzt es diesen Kindern, richtig rechnen zu können, wenn sie nicht verstehen, was Multiplizieren bedeutet?

Mehr Verstehensorientierung notwendig!

Anna hat heute Geburtstag. Sie wird 6 Jahre alt.
Sie hat 5 Freundinnen eingeladen.

$$6 \cdot 5 = 30$$

(Justine, 5. Schuljahr)

b) Erfinde eine eigene Rechengeschichte zu der Aufgabe $6 \cdot 5$.

Rechengeschichte: Rezan ging ins Laden und kaufte 6 Kartoffel und 5 Tomaten. Von dem teureren

Frage: Wie viel muss er bezahlen.

Malaufgabe: $6 \cdot 5 = 30$

Das Ergebnis bedeutet: Es sind 30€.

(Sina, 5. Schuljahr)

Verstehensorientiert unterrichten

... braucht verstandene und gesicherte Basiskompetenzen

Zahlverständnis
... als Grundlage von ...
Operationsverständnis



Grundvorstellungen besitzen Darstellungen vernetzen Zahlbeziehungen nutzen



Grundvorstellungen besitzen Darstellungen vernetzen Aufgabenbeziehungen nutzen

Verstehensorientiert unterrichten

Verstehensgrundlagen...

- fußen auf gesicherten Grundlagen
- sind zentral für den Aufbau eines inhaltlichen Verständnisses
- gilt es im Vorfeld zu identifizieren: Was sind wesentliche Aspekte des Inhalts, damit Kinder ein inhaltliches Verständnis aufbauen können?
- werden sichtbar in den Antworten der Kinder zu „Erkläre, warum..“ Aufträgen und Fragen
- müssen für jeden Inhalt neu geklärt werden



Arithmetische Basiskompetenzen

Zahlverständnis

Schnelles Kopfrechnen

Stellenwertverständnis

Ziffernrechnen

Operationsverständnis

Zahlenrechnen

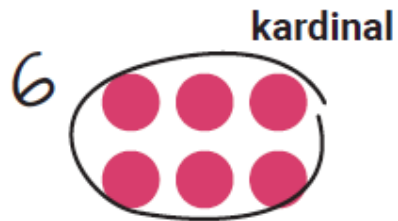


Zahlverständnis – Grundvorstellungen besitzen

Aufzubauende Kompetenzen - Die Bedeutung von Zahlen kennen



Zahlen als Bezeichnung einer Ordnung von Elementen



Zahlen als Mengen verstehen und erfassen

Abbildungen entnommen aus: MSW NRW, 2020, S. 18

„**Grundvorstellungen** bezeichnen **inhaltliche Interpretationen mathematischer Objekte** (d.h. Begriffe, Operationen etc.) und ermöglichen, mathematischen Begriffen und Operationen zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen oder umgekehrt mathematische Sachverhalte lebensweltlich zu interpretieren.“ (Vom Hofe, 2003)

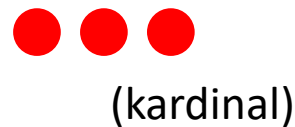
Zahlverständnis – Grundvorstellungen besitzen

Wichtig: Aufzubauende Kompetenzen:

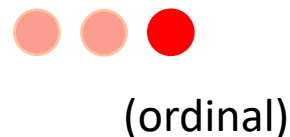
Der kardinale Zahlaspekt!

„Für viele Kinder ist es zunächst schwer zu verstehen,

dass 3 Kinder „drei Kinder“ sind,



das 3. Kind jedoch nur eines.“



(Kaufmann & Wessolowski, 2006, S. 22)

Typische Schwierigkeiten

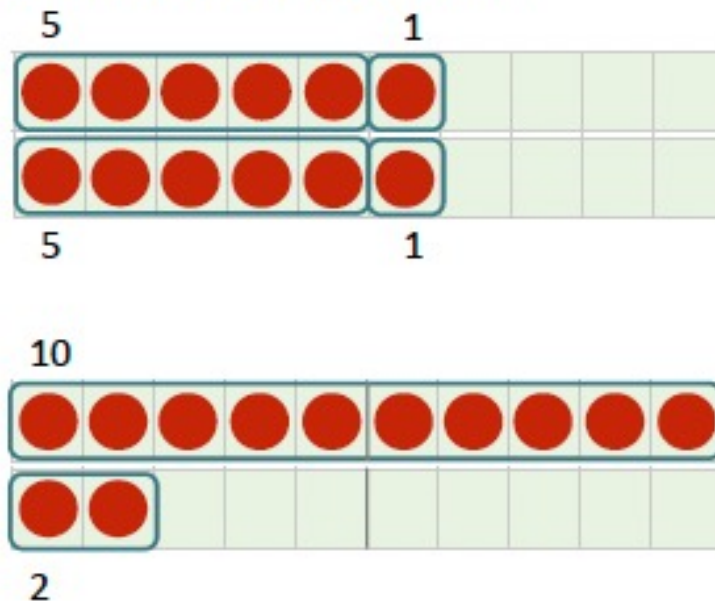
Ordinale Interpretation von Zahlen als Position



Zahlverständnis – Grundvorstellungen besitzen

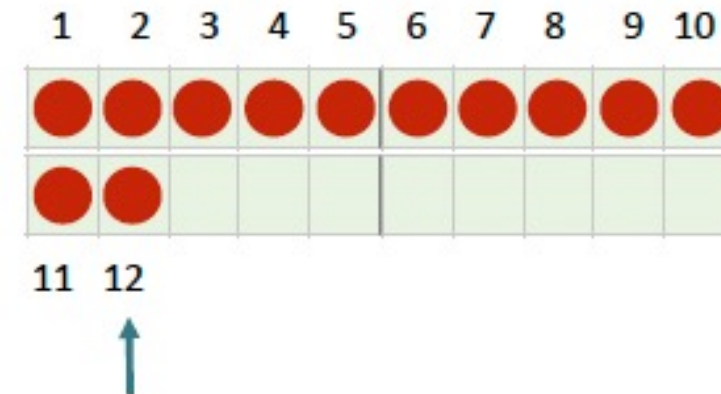
Aufzubauende Kompetenzen

- Strukturierte Anzahlerfassung



Typische Schwierigkeiten

- Strukturen werden nicht erkannt und genutzt
- Abzählen in Einzelschritten



Zahlverständnis – Zahlbeziehungen nutzen

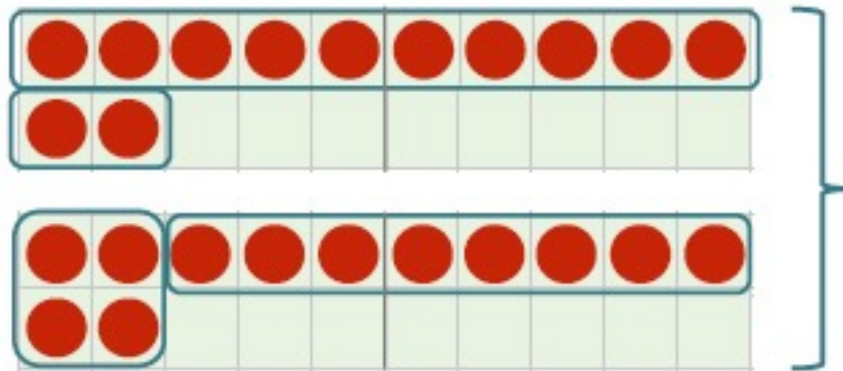
Beziehungen zwischen Zahlen kennen:

- Teile-Ganzes Beziehung
- Relationale Beziehung

Die **Bedeutung von Zahlen** und **Beziehungen zwischen Zahlen** bilden die Grundlage für das Ausnutzen von Zahlbeziehungen beim geschickten Rechnen und damit die Ablösung vom zählenden Rechnen.

Zahlverständnis – Zahlbeziehungen nutzen

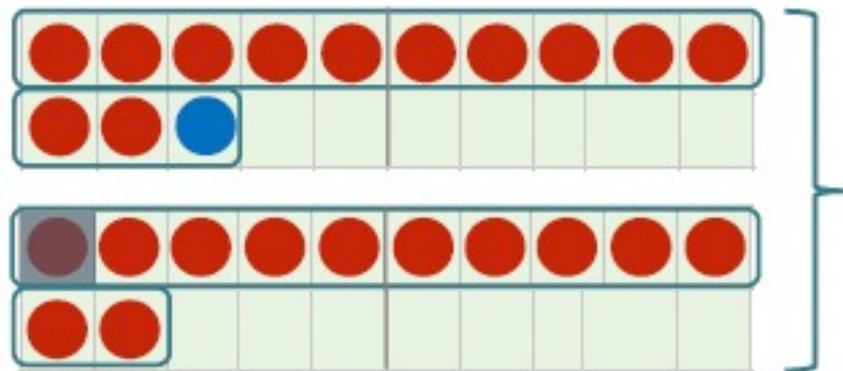
Aufzubauende Kompetenzen: Zahlen in Beziehungen zu anderen sehen – Teil-Ganzes-Beziehung



Die Gesamtanzahl ändert sich nicht,
wenn die Menge in Teile zerlegt wird.

$$10 + 2 = 12$$

$$4 + 8 = 4 + 3 + 5 = 12$$



Wenn ein Teil verändert
(vergrößert/verkleinert) wird, hat
das Auswirkung auf das Gesamte.

$$10 + (2 + 1) = 10 + 3$$

$$(10 - 1) + 2 = 9 + 2$$

Zahlverständnis – Zahlbeziehungen nutzen

Teile-Ganzes Beziehung

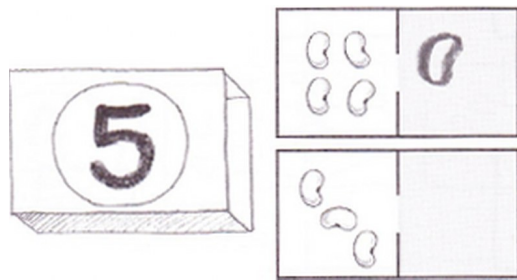


Abbildung entnommen aus: Matheprofis 1

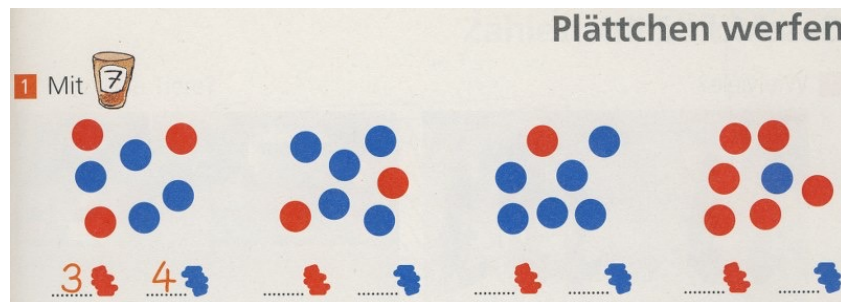


Abbildung entnommen aus: Zahlenbuch 1

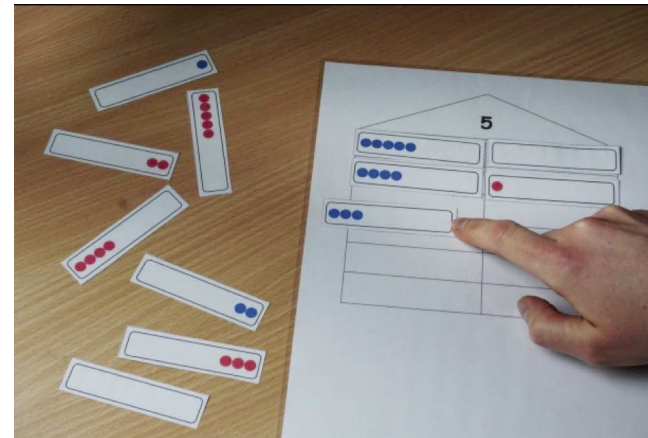


Abbildung entnommen aus: MSW NRW, 2020, S. 23



3

5



Ich zerlege die 7 in 4 und 3.

Zahlverständnis – Zahlbeziehungen nutzen

Verständnis relationaler Zahlbeziehungen

Das Verstehen der Zahlwortreihe als Anzahl von Zählsschritten ermöglicht das Verständnis relationaler Zahlbeziehungen.

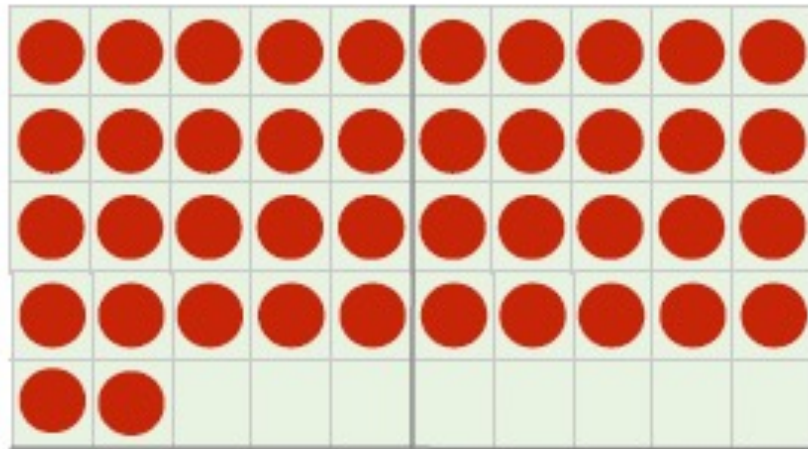
→ Mengen können miteinander **in Beziehung** gesetzt werden.

„Lisa hat 3 Murmeln.
Jens hat 5 Murmeln mehr als Lisa.“

Zahlverständnis – Zahlbeziehungen nutzen

Aufzubauende Kompetenzen

- Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen sehen



$$40 + 2$$

$$22 + 20$$

$$20 + 20 + 2$$

$$50 - 8$$

Typische Schwierigkeiten

- „Beziehungen“ werden auf der symbolischen Ebene gesehen

$$20 + 20 + 2$$

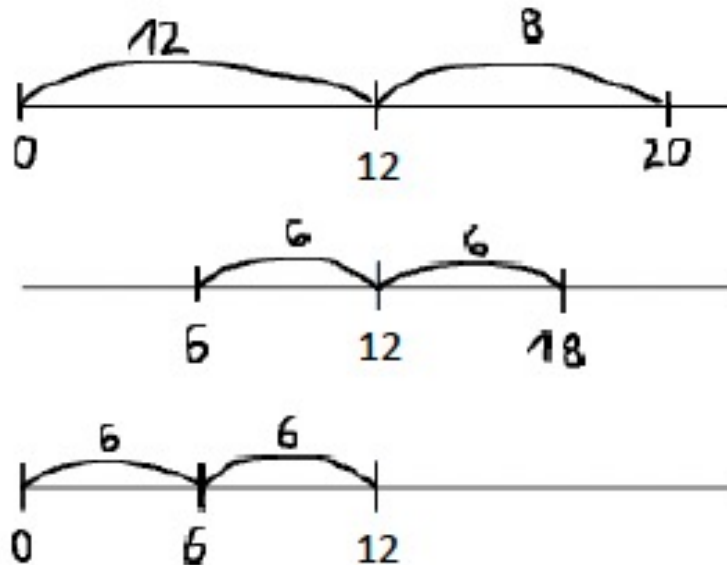
da sind drei Zweien.

- Verknüpfung mit der Vorstellung von Mengen fehlt

Zahlverständnis

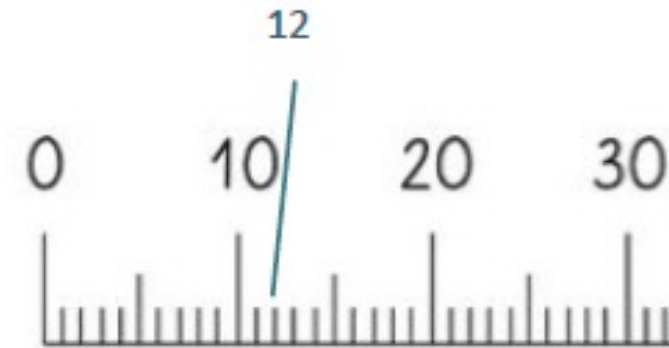
Aufzubauende Kompetenzen

- Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen sehen



Typische Schwierigkeiten

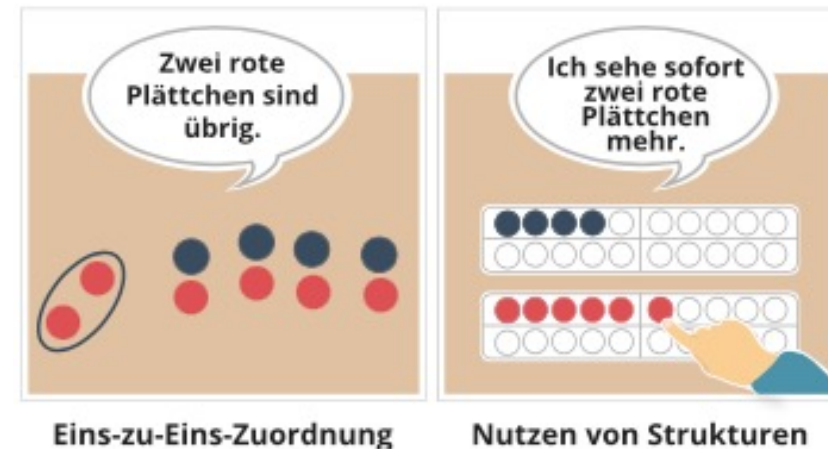
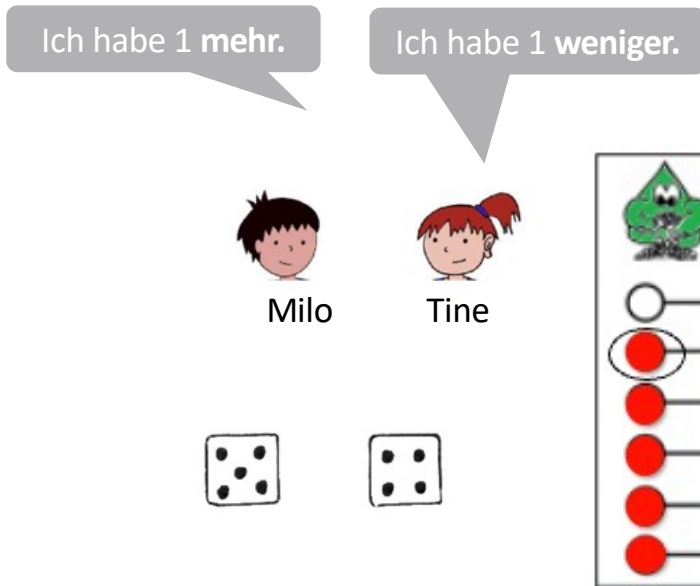
- Einseitige Sicht auf Zahlen als Positionen



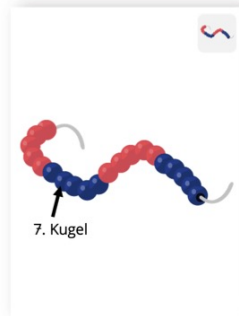
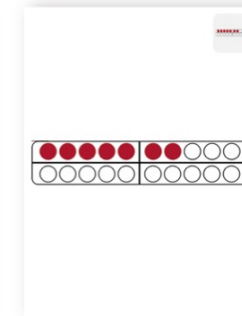
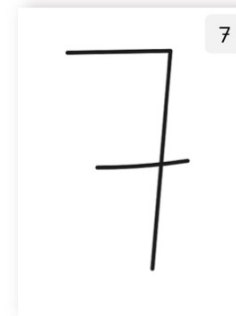
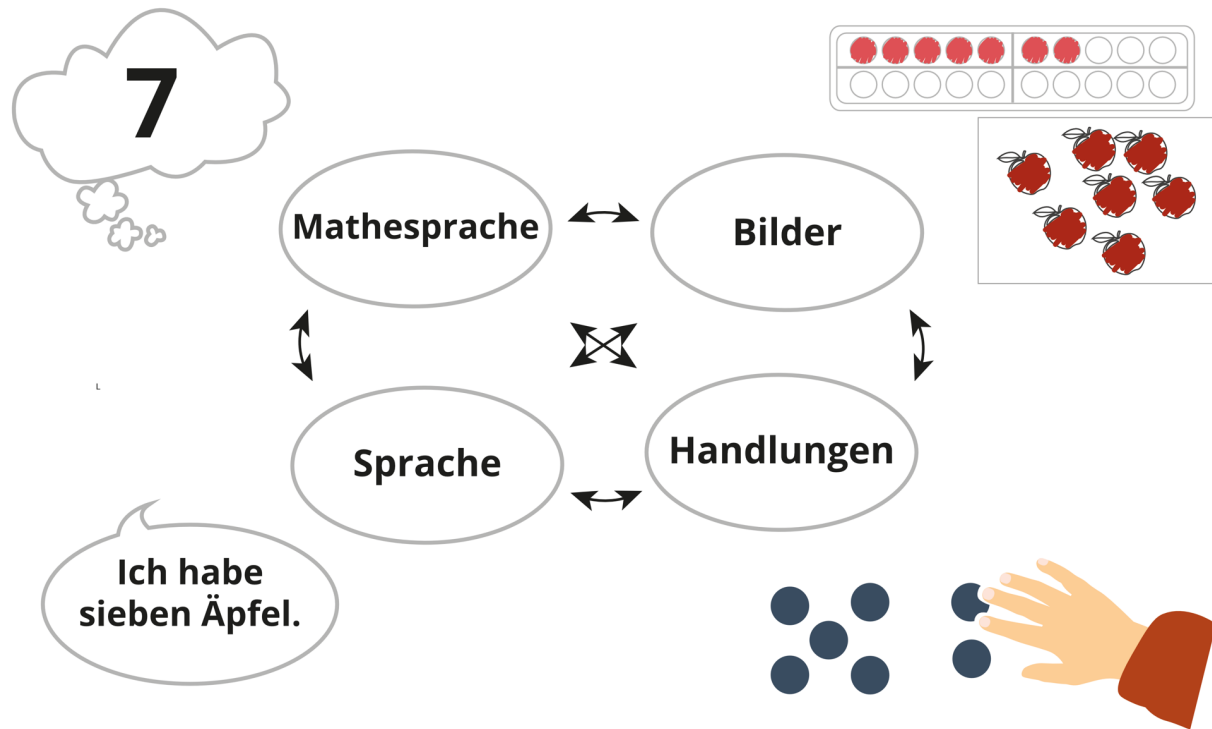
Zahlverständnis – Zahlbeziehungen nutzen

Relationale Beziehung

Handlungsbegleitendes Sprechen



Zahlverständnis – Darstellungen vernetzen



Zahlverständnis – Bedeutung fürs Rechnen

3.3 Große Aufgaben finden



a) Lege die kleine Aufgabe am Zwanzigerfeld. Bei welchen großen Aufgaben kann sie dir helfen?

$$4 + 5 = \underline{\quad}$$

$$2 + 7 = \underline{\quad}$$

$$14 + 5 = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$15 + 4 = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$3 + 3 = \underline{\quad}$$

$$1 + 8 = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Wie rechnest du? Beschreibe.

a) $603 - 399$

b) $492 - 489$

c) $735 - 221$

d) $341 - 197$

e) $498 - 251$

f) $452 - 439$

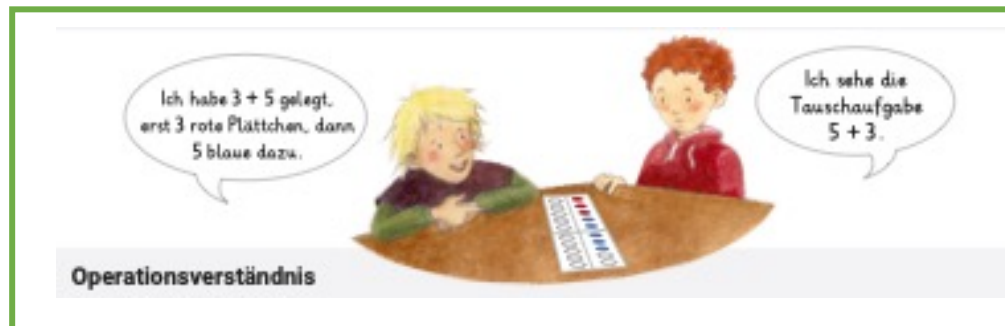
Bedeutung des Zahlverständnisses zum Lösen von Aufgaben

Diskutieren Sie zu zweit:

- Warum ist für das Lesen von Aufgaben wie diesen wichtig, dass Kinder ein Verständnis von Zahlen haben?
- Wie lesen Kinder mit einem fundierten Verständnis von Zahlen/mit typischen Schwierigkeiten die Aufgabe?



Arithmetische Basiskompetenzen



Operationsverständnis

„Operationsverständnis zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen [...] verschiedenen ‚Sprachen‘ hin- und her übersetzen zu können, also Verbindungen herstellen zu können zwischen konkreten, häufig in Alltagssprache beschriebenen, (Alltags-) Situationen und mathematischen Symbolen und Rechenoperationen.“

(Gerster & Schultz 2004, 388)

Tragfähiges Operationsverständnis

- Einsicht, was die Operationen als mathematische Idee ausmacht und über entsprechende Vorstellungen verfügen
- Operationen sicher und flexibel handhaben
- Kernaufgaben sicher lesen
- Beziehungen zwischen Aufgaben und Operationen erkennen und nutzen

Eingeschränktes Operationsverständnis

- Bedeutungstragende Vorstellungen fehlen
- Zählendes Rechnen
- Isoliertes Lesen von Aufgaben ohne Nutzen operativer Beziehungen

Operationsverständnis – Multiplikation

Male ein Bild zur Aufgabe $3 \cdot 2$ für ein Kind, das unsere Zahlen und Rechenzeichen nicht kennt.

Tragfähiges Operationsverständnis



- Einsicht, was die Multiplikation als mathematische Idee ausmacht, wird über Darstellung als Wiederholen im Bild deutlich
- Vernetzung von Darstellungsebenen gelingt

Eingeschränktes Operationsverständnis



- Faktoren werden einzeln übersetzt, aber die Idee der Multiplikation ist nicht sichtbar



Operationsverständnis – Multiplikation

- Was bedeutet eigentlich multiplizieren?
- Welche Handlungen können sich hinter dem Malzeichen verbergen?
- Was passiert mit den Zahlen, wenn man sie multipliziert?

Grundvorstellungen
entwickeln

Darstellungen
vernetzen

Beziehungen und
Strukturen nutzen

→ Grundlage: gesichertes Zahlverständnis



Grundvorstellungen entwickeln

- Die Bedeutung hinter der Rechenoperation verstehen
- Multiplikation in unterschiedlichen Kontexten erfahren
 - Wiederholen (zeitlich-sukzessiv)
 - Zusammenfassen (räumlich-simultan)
 - Vergleichen

Wiederholen:

Emre fährt jeden Tag 3 Runden mit dem Roller um den Hof. Wie viele Runden fährt er in einer Woche?

Zusammenfassen:

Auf dem Tisch stehen 8 Gläser. In jedes Glas legt Tina 2 Eiswürfel. Wie viele Eiswürfel sind es zusammen?

Vergleichen:

Sara hat 4 Muscheln. Kaya hat fünfmal so viele. Wie viele Muscheln hat Kaya?



Darstellungen vernetzen

Sprachliche Begleitung dient der Vernetzung der
Darstellungsformen & Klärung der Zusammenhänge:

Erkläre, warum ...

... die Aufgabe zum Bild passt.

... die Geschichte zur Aufgabe
passt.

... die Aufgabe so mit Plättchen
dargestellt werden kann.

... das Bild zu der Geschichte
passt.

Zeige uns ...

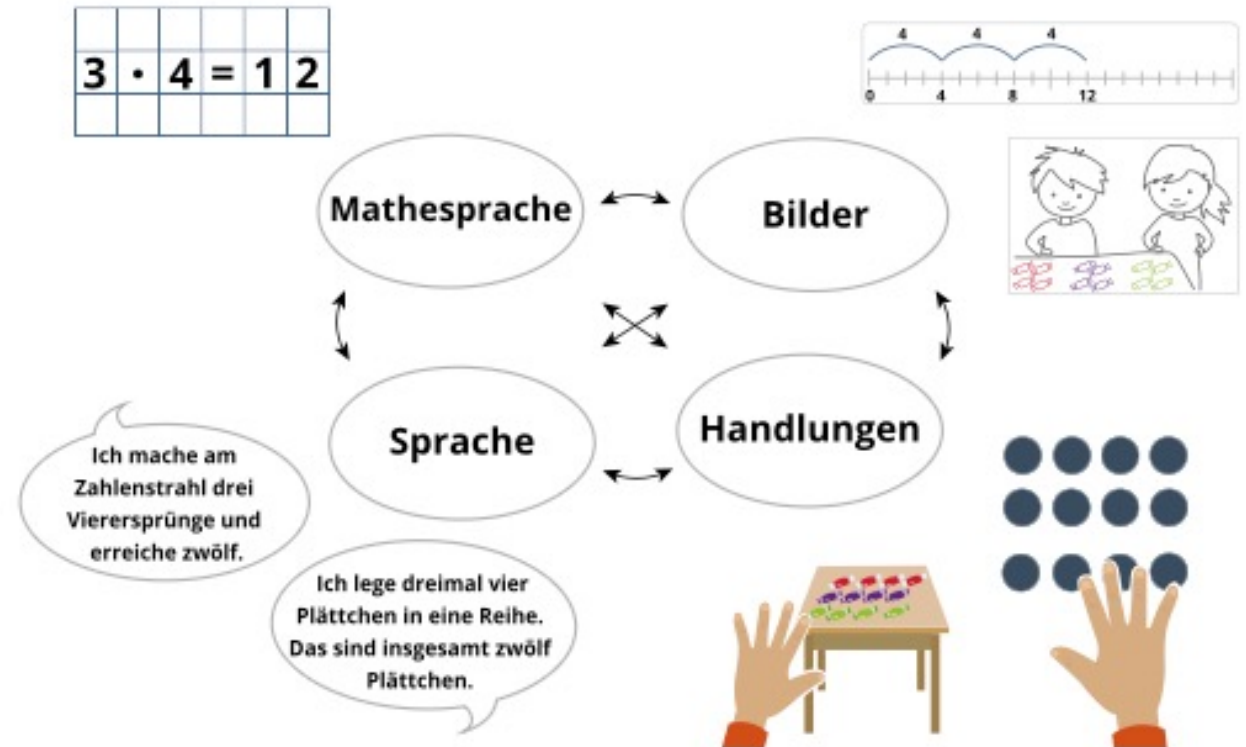


Abbildung: <https://mahiko.dzlm.de/node/71>



Langfristige Nutzung von Vorstellungen und Darstellungen

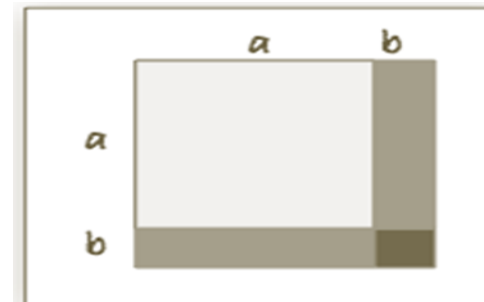
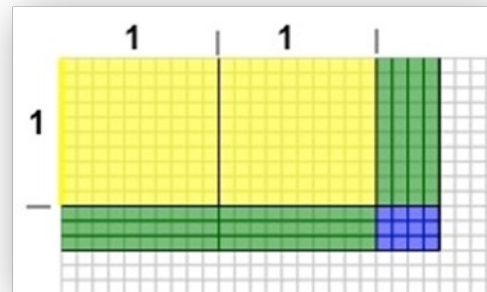
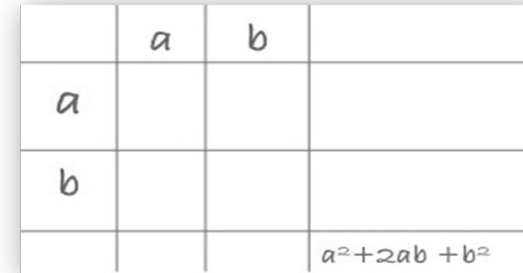
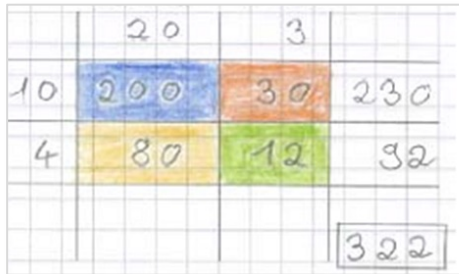
Natürliche Zahlen
(Kl. 2–5)



Dezimalzahlen
(Kl. 6)



Algebra: Binomische Formel
(Kl. 8)



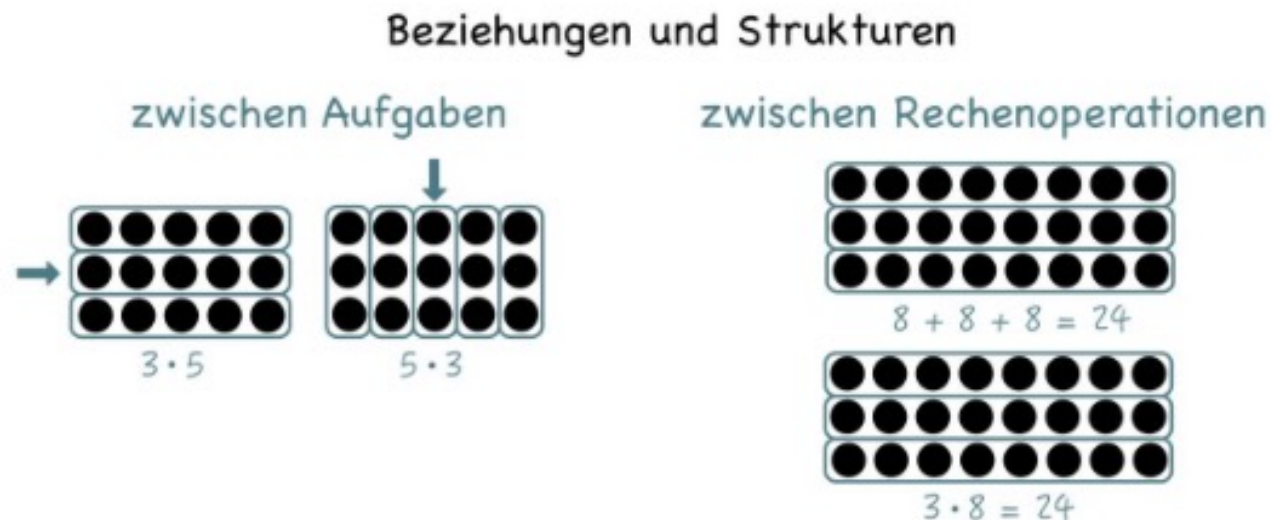
Fazit:

Auch für das Rechnen
sind grundlegende
Vorstellungen und
Darstellungen wichtig



Beziehungen und Strukturen nutzen

- Lernende sollen Beziehungen und Strukturen in Aufgaben entdecken.
- Sie sollen diese Beziehungen für sicheres und flexibles Rechnen nutzen können.
- Besonders in der Multiplikation lassen sich mit Material vielfältige Strukturen sichtbar machen.
- So können Zusammenhänge zwischen Aufgaben sowie zwischen verschiedenen Rechenoperationen erkundet werden.



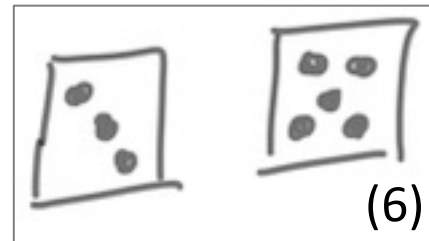
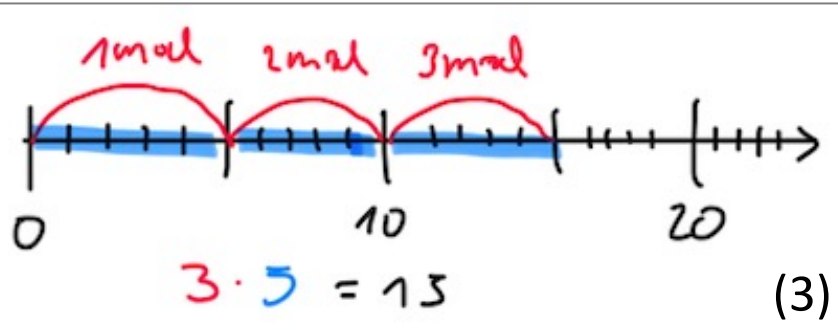
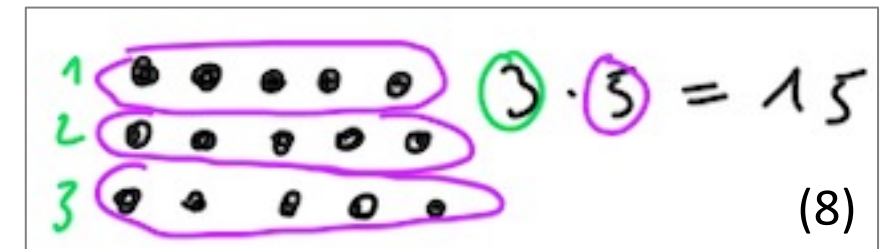
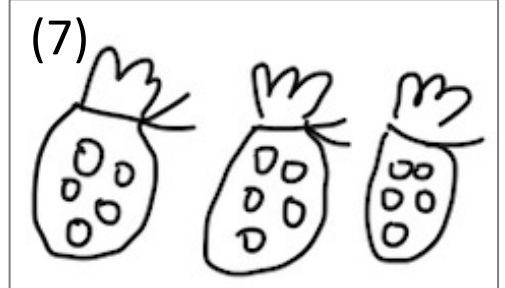
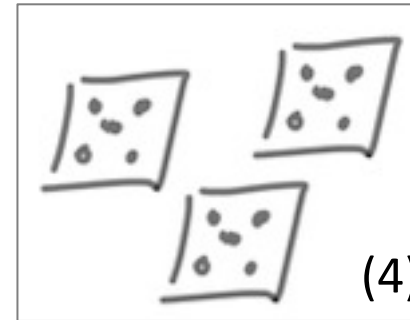
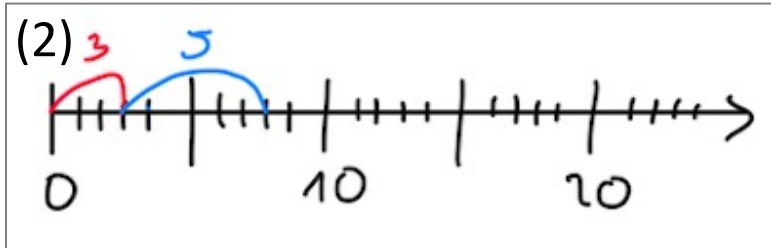
Vorstellungsbilder zur Multiplikation

Male ein Bild zur Aufgabe $3 \cdot 5$ für ein Kind, das unsere Zahlen und Rechenzeichen nicht kennt.

(1)

$$000 \cdot 00000 = 000000000000000000$$

(2)



Erkunden Sie die Bilder der Kinder:
Welche Bilder zeugen von Verständnis
der Multiplikation?

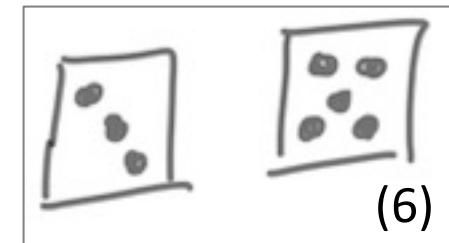
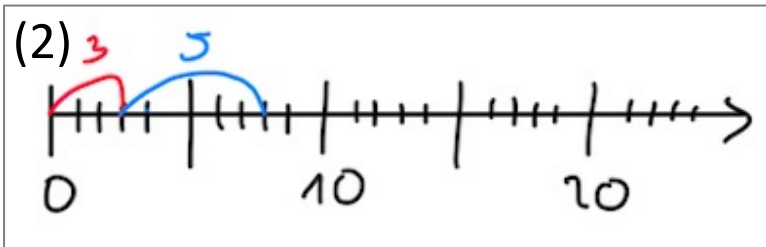
Vorstellungsbilder zur Multiplikation

Keine bedeutungstragenden Vorstellungen (die Symbole werden verbildlicht)

(1)

$$000 \cdot 00000 = 000000000000000000$$

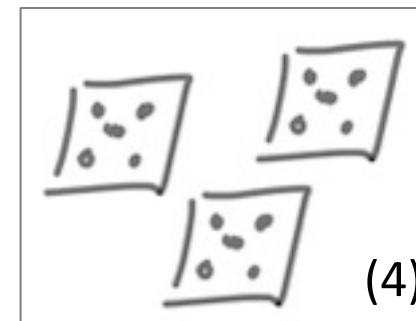
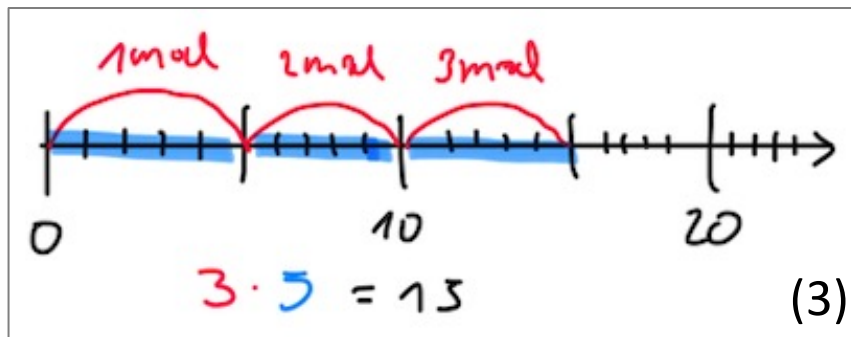
(2)



→ Die Faktoren 3 und 5 werden einzeln übersetzt und bildlich dargestellt

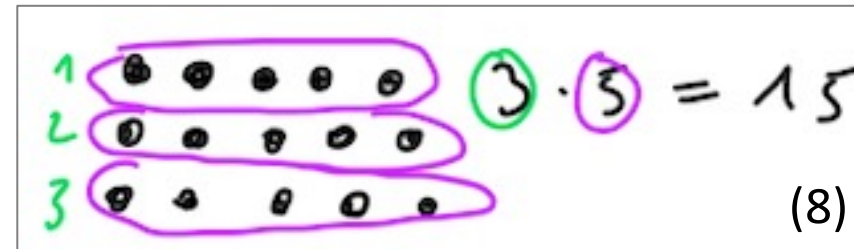
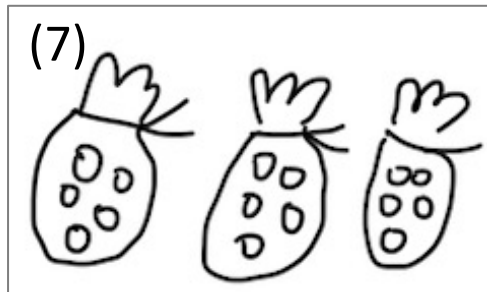
Vorstellungsbilder zur Multiplikation

Bedeutungstragende Vorstellung: Wiederholen (zeitlich-sukzessiv)



Vorstellungsbilder zur Multiplikation

Bedeutungstragende Vorstellung: Zusammenfassen



Operationsvorstellungen aufbauen



Welche Fragen können Sie zu diesem Bild stellen, damit reichhaltige Gesprächsanlässe entstehen?

Finde einen Bildausschnitt, der zu der Aufgabe $2 \cdot 3$ passt.

Stelle die Anzahl der Möhren mit Plättchen dar.

Warum passt zu dem Bild im Schrank die Aufgabe $6 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$?

Erzähle eine Rechengeschichte, die zu dem Einkauf passt.

Verstehensorientiert unterrichten

Checkliste

Verstehensorientierter Unterricht...

- macht Verstehen sichtbar in Antworten auf „Erkläre, warum ...“-Aufträge und -Fragen
- benötigt die Klärung zentraler Aspekte/Verstehensgrundlagen für den jeweiligen Inhalt
- Inhalt baut auf gesicherten Grundlagen auf

Verstehensorientierung am Beispiel Multiplikation

- zentrale Aspekte zum Operationsverständnis:
 - (1) Grundvorstellungen aufbauen
 - (2) Darstellungen kontinuierlich vernetzen
 - (3) Beziehungen zwischen Aufgaben und Operationen nutzen
- Grundlage: Gesichertes Zahlverständnis

Feedback zur Sitzung

Geben Sie uns Feedback zur Sitzung.

- Was haben Sie mitgenommen?
- Was hätten Sie sich noch gewünscht?
- Wünsche für die kommenden Sitzungen?
- ...



Vielen Dank für die Teilnahme und
viel Erfolg in der Praxis!

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A., & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 145–157). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Gaidoschik, M. (2009). *Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis*. Persen.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 111(Sonderheft), 1–24.

Gerster, H.-D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik: 1. und 2. Schuljahr* (S. 35–102). Klett.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen. <https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf>

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2021). Inklusive Praktiken im Mathematikunterricht: Empirische Analysen von Unterrichtsdiskursen in Einführungsphasen. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, Advance online publication. <https://doi.org/10.1007/s42278-020-00097-1>

Häsel-Weide, U., Seitz, S., Wallner, M., Wilke, Y., & Heckmann, L. (2021). Mit Aufgaben im inklusiven Mathematikunterricht professionell umgehen: Erkenntnisse einer Interviewstudie mit Lehrpersonen der Sekundarstufe. *QfI – Qualifizierung für Inklusion. Online-Zeitschrift zur Forschung über Aus-, Fort- und Weiterbildung pädagogischer Fachkräfte*, 3(1). <https://doi.org/10.21248/qfi.57>

Häsel-Weide, U., Seitz, S., Wallner, M., & Wilke, Y. (2022). Professionalisierung für inklusiven Mathematikunterricht. Interdisziplinäre Seminarkonzeption zur reflexiven Professionalisierung angehender Mathematiklehrkräfte in der Sekundarstufe. In D. Lutz, J. Becker, F. Buchhaupt, D. Katzenbach, A. Strecker, & M. Urban (Eds.), *Qualifizierung für Inklusion. Sekundarstufe* (pp. 83–100). Waxmann.

Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Fünf Prinzipien für qualitätvollen Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, 242, 2–9. <https://www.friedrich-verlag.de/shop/mwdownloads/download/link/id/114555/>

Kaufmann, S., & Wesselowski, S. (2006). *Rechenstörungen: Diagnose und Förderbausteine* (1. Aufl.). Kallmeyer

Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7, 969212. <https://doi.org/10.3389/feduc.2022.969212>

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül: Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 213–234). Beltz.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen: Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Cornelsen.

Schipper, W. (1996). Kompetenz und Heterogenität im arithmetischen Anfangsunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, 96, 11–15

Schipper, W. (2005). *Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern* (Modulbeschreibungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule. Mathematik. G4; 1. Aufl.). IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*, 118, 4–8.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen* (1. Aufl.). Cornelsen.