

LERNCREW RUHR

Vertiefungsmodul 2: kognitive Aktivierung

Ablauf



- Kognitive Aktivierung
- Kognitiv aktivierende Aufgaben
- Aufgaben adaptieren
- Kognitive Aktivierung in der Unterrichtsphase Üben

Fünf QuaMath-Prinzipien für guten Mathematikunterricht





Kognitive Aktivierung

Mathematische Kompetenzen entwickeln sich durch **aktives und tiefgehendes Denken**. Oberflächenlernen reicht für ein umfassendes Verständnis nicht aus – möglichst alle Lernende sollten im Unterricht aktiv ins Denken kommen.

Realisieren lässt sich dies unter anderem durch:

- **Momente der Irritation:** Aufgaben, die zum Hinterfragen und zum bewussten Auseinandersetzen mit eigenen Vorstellungen anregen und so vertieftes Nachdenken auslösen.
- **Reichhaltige Aufgaben:** die z. B. zum Problemlösen, Modellieren, Argumentieren, Generalisieren und Strukturieren herausfordern
- **Mathematische Diskussionen:** in denen unterschiedliche Lösungen und Strategien thematisiert, begründet und miteinander in Beziehung gesetzt werden (nicht nur für leistungsstarke Schüler*innen)
- **Inhaltliches Denken vor Kalkül:** Lernende sollen Rechenverfahren nicht nur beherrschen, sondern mit zugrunde liegenden Konzepten verknüpfen

Kognitiv aktivierende Aufgaben

- bieten Anlässe zum Entdecken, Beschreiben und Begründen
- Förderung von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen
- für alle Lernende zugänglich (Bearbeitung auf unterschiedlichem Niveau; individuell herausfordernd)

Leuders & Holzäpfel, 2011; Holzäpfel et al., 2024

„Ein lernwirksamer Unterricht setzt voraus, dass die Schüler*innen durch entsprechende Lerngelegenheiten (Aufgaben, Materialien, etc.) sprachlich und kognitiv so herausgefordert werden, dass sie Lernaktivitäten entfalten.“ (SWK 2022, S. 53)

Typische kognitive Aktivitäten im MU

Oberflächlich

Tiefgehend

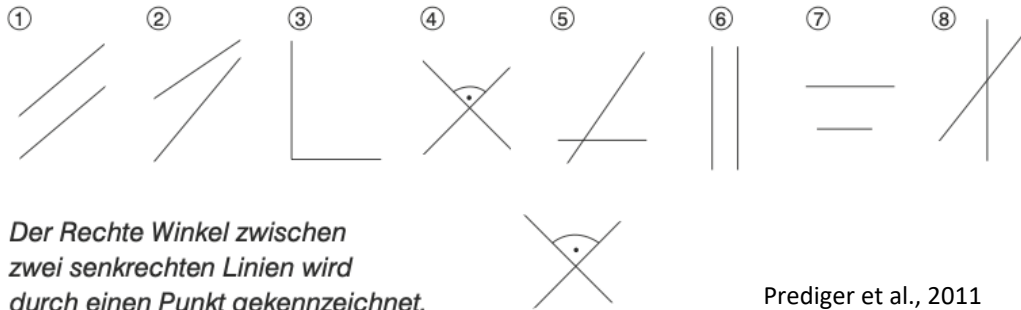
Liste kognitiver Aktivitäten 	
1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen	
Konzeptuell	Prozedural
- Fakten abrufen, angeben, beschreiben - Wiedergeben, nennen, benennen - Aufzählen, Beispiele angeben	- Rechnen und Formeln nutzen - Algorithmus / Verfahren ausführen - Bestimmen, Ermitteln
2 Verstehen, Anwenden & Begründen	
Konzeptuell	Prozedural
- Erklären von Bedeutungen - Begründen mathematischer Sachverhalte - Vernetzen von Inhalten und Darstellungen - Beispiele und Gegenbeispiele finden - Formalisieren/ Schematisieren - Mathematisieren (mit Modell finden), Interpretieren	- Erläutern von Rechenwegen - Flexibel rechnen, einen Algorithmus modifiziert nutzen, überschlagen /schätzen, Lösungsweg bewusst wählen - Einfaches Mathematisieren (mit vorgegebenem Modell) - Strategien nutzen - Entscheiden ohne Begründung, rechnerisch begründen& nachweisen, zeigen
3 Analysieren, Bewerten & Beweisen	
- Explorieren: Erfassen, Ausprobieren, Vermuten, Systematisieren, begründet vermuten - Muster fortsetzen & finden: charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, Abstrahieren - Strukturieren: Klassifizieren, Kategorisieren, Analogisieren / Vergleichen - Generalisieren: Zusammenhänge erfassen und allgemein Beschreiben - Überprüfen: Beurteilen, Entscheiden mit Begründung, Validieren, Reflektieren , (Formal) Beweisen - Geeignete Darstellungen finden, analysieren und interpretieren	
4 Kreativ neu denken	
- Komplexe inner- und außermathematische Probleme lösen - Hypothesen aufstellen, eigene Ideen entwickeln, Situationen/ Modelle/ tragfähige Begriffe erfinden - Neue Perspektiven einnehmen, Planen / Bearbeitungsprozesse strukturieren Recherchieren - Metakognitiv und kritisch reflektieren	

Kognitive Aktivitäten in Aufgaben

Betrachten Sie diese Aufgaben. Welche kognitiven Aktivitäten werden jeweils angeregt?

Aufgabe 1:

1. Welche der folgenden Bilder zeigen Linien, die senkrecht zueinander stehen? Wo liegen die Linien parallel? In welchen Bildern trifft keines von beidem zu? Markiere die Bilder in jeweils einer anderen Farbe.



Aufgabe 2:

Lesen Sie die Definition zur Parallelität und schreiben Sie den roten Kasten in Ihr Merkheft.

Die Geraden g und h sind genau dann zueinander parallel (in Zeichen: $g \parallel h$), wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie gleich sind.

Zu jeder Geraden g gibt es beliebig viele Parallelen.

Beispielsweise durch Parallelverschiebung können sie gezeichnet werden. Durch Angabe eines Punktes P wird aus allen diesen Parallelen eindeutig genau jene Gerade h ausgewählt, die durch P verläuft. Andererseits kann durch jeden Punkt P , der mit einer Geraden in einer Ebene liegt, nicht aber zur Geraden gehört, genau eine Gerade g' gezogen werden, die zu g parallel ist.

Aufgabe 1:

1. Welche der folgenden Bilder zeigen Linien, die senkrecht zueinander stehen? Wo liegen die Linien parallel? In welchen Bildern trifft keines von beidem zu? Markiere die Bilder in jeweils einer anderen Farbe.

→ Der Rechte Winkel zwischen zwei senkrechten Linien wird durch einen Punkt gekennzeichnet.

Preidiger et al., 2011

Aufgabe 2:

Lese die Definition zur Parallelität und schreibe den roten Kasten in dein Merkheft.

Die Geraden g und h sind genau dann zueinander parallel (in Zeichen: $g \parallel h$), wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie gleich sind.
Zu jeder Geraden g gibt es beliebig viele Parallelen. Beispielsweise durch Parallelverschiebung können sie gezeichnet werden. Durch Angabe eines Punktes P wird aus allen diesen Parallelen eindeutig genau jene Gerade h ausgewählt, die durch P verläuft. Andererseits kann durch jeden Punkt P , der mit einer Geraden in einer Ebene liegt, nicht aber zur Geraden gehört, genau eine Gerade g' gezogen werden, die zu g parallel ist.

<https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/paralleltaet>

Liste kognitiver Aktivitäten



1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen

Konzeptuell

- Fakten abrufen, angeben, beschreiben
- Wiedergeben, nennen, benennen
- Aufzählen, Beispiele angeben

Prozedural

- Rechnen und Formeln nutzen
- Algorithmus / Verfahren ausführen
- Bestimmen, Ermitteln

2 Verstehen, Anwenden & Begründen

Konzeptuell

- Erklären von Bedeutungen
- Begründen mathematischer Sachverhalte
- Vernetzen von Inhalten und Darstellungen
- Beispiele und Gegenbeispiele finden
- Formalisieren/ Schematisieren
- Mathematisieren (mit Modell finden), Interpretieren

Prozedural

- Erläutern von Rechenwegen
- Flexibel rechnen, einen Algorithmus modifiziert nutzen, überschlagen /schätzen, Lösungsweg bewusst wählen
- Einfaches Mathematisieren (mit vorgegebenem Modell)
- Strategien nutzen
- Entscheiden ohne Begründung, rechnerisch begründen & nachweisen, zeigen

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Explorieren: Erfassen, Ausprobieren, Vermuten, Systematisieren, begründet vermuten
- Muster fortsetzen & finden: charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, Abstrahieren
- Strukturieren: Klassifizieren, Kategorisieren, Analogisieren / Vergleichen
- Generalisieren: Zusammenhänge erfassen und allgemein Beschreiben
- Überprüfen: Beurteilen, Entscheiden mit Begründung, Validieren, Reflektieren, (Formal) Beweisen
- Geeignete Darstellungen finden, analysieren und interpretieren

4 Kreativ neu denken

- Komplexe inner- und außermathematische Probleme lösen
- Hypothesen aufstellen, eigene Ideen entwickeln, Situationen/ Modelle/ tragfähige Begriffe erfinden
- Neue Perspektiven einnehmen, Planen / Bearbeitungsprozesse strukturieren Recherchieren
- Metakognitiv und kritisch reflektieren

(Barzel & Ebers 2020 auf Grundlage von Anderson & Krathwohl 2001)

Potenziell angeregte kognitive Aktivitäten

1 Erinnern, Reproduzieren & Ausführen

Konzeptuell

- Fakten abrufen, angeben, beschreiben
- Wiedergeben, nennen, benennen
- Aufzählen, Beispiele angeben

Prozedural

- Rechnen und Formeln nutzen
- Algorithmus/Verfahren ausführen
- Bestimmen, Ermitteln

2 Verstehen, Anwenden & Begründen

Konzeptuell

- Erklären von Bedeutungen
- Begründen mathematischer Sachverhalte
- Vernetzen von Inhalten und Darstellungen
- Beispiele und Gegenbeispiele finden
- Formalisieren/Schematisieren
- Mathematisieren (mit Modell finden), Interpretieren

Prozedural

- Erläutern von Rechenwegen
- Flexibel rechnen, einen Algorithmus modifiziert nutzen, überschlagen/schätzen, Lösungsweg bewusst wählen
- Einfaches Mathematisieren (mit vorgegebenem Modell)
- Strategien nutzen
- Entscheiden ohne Begründung, rechnerisch begründen & nachweisen, zeigen

3 Analysieren, Bewerten & Beweisen

- Explorieren: Erfassen, Ausprobieren, Vermuten, Systematisieren, begründet vermuten
- Muster fortsetzen & finden: charakteristische Eigenschaften herausarbeiten, Abstrahieren
- Strukturieren: Klassifizieren, Kategorisieren, Analogisieren, Vergleichen
- Generalisieren: Zusammenhänge erfassen und allgemein Beschreiben
- Überprüfen: Beurteilen, Entscheiden mit Begründung, Validieren, Reflektieren, (Formal) Beweisen
- Geeignete Darstellungen finden, analysieren und interpretieren

4 Kreativ neu denken

- Komplexe inner- und außermathematische Probleme lösen
- Hypothesen aufstellen, eigene Ideen entwickeln, Situationen/Modelle/tragfähige Begriffe erfinden
- Neue Perspektiven einnehmen, Planen/Bearbeitungsprozesse strukturieren Recherchieren
- Metakognitiv und kritisch reflektieren

Aufgabe 2:

Lesen die Definition zur Parallelität und schreibe den roten Kasten in dein Merkheft.

Die Geraden g und h sind genau dann zueinander parallel (in Zeichen: $g \parallel h$), wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben oder wenn sie gleich sind.
Zu jeder Geraden g gibt es beliebig viele Parallelen. Beispielsweise durch Parallelverschiebung können sie gezeichnet werden. Durch Angabe eines Punktes P wird aus allen diesen Parallelen eindeutig genau jene Gerade h ausgewählt, die durch P verläuft. Andererseits kann durch jeden Punkt P , der mit einer Geraden in einer Ebene liegt, nicht aber zur Geraden gehört, genau eine Gerade g' gezogen werden, die zu g parallel ist.

<https://www.kernheffer.de/schuelerlesikon/mathematik/artikel/parallelitaet>

1. Welche der folgenden Bilder zeigen Linien, die senkrecht zueinander stehen? Wo liegen die Linien parallel? In welchen Bildern trifft keines von beidem zu? Markiere die Bilder in jeweils einer anderen Farbe.

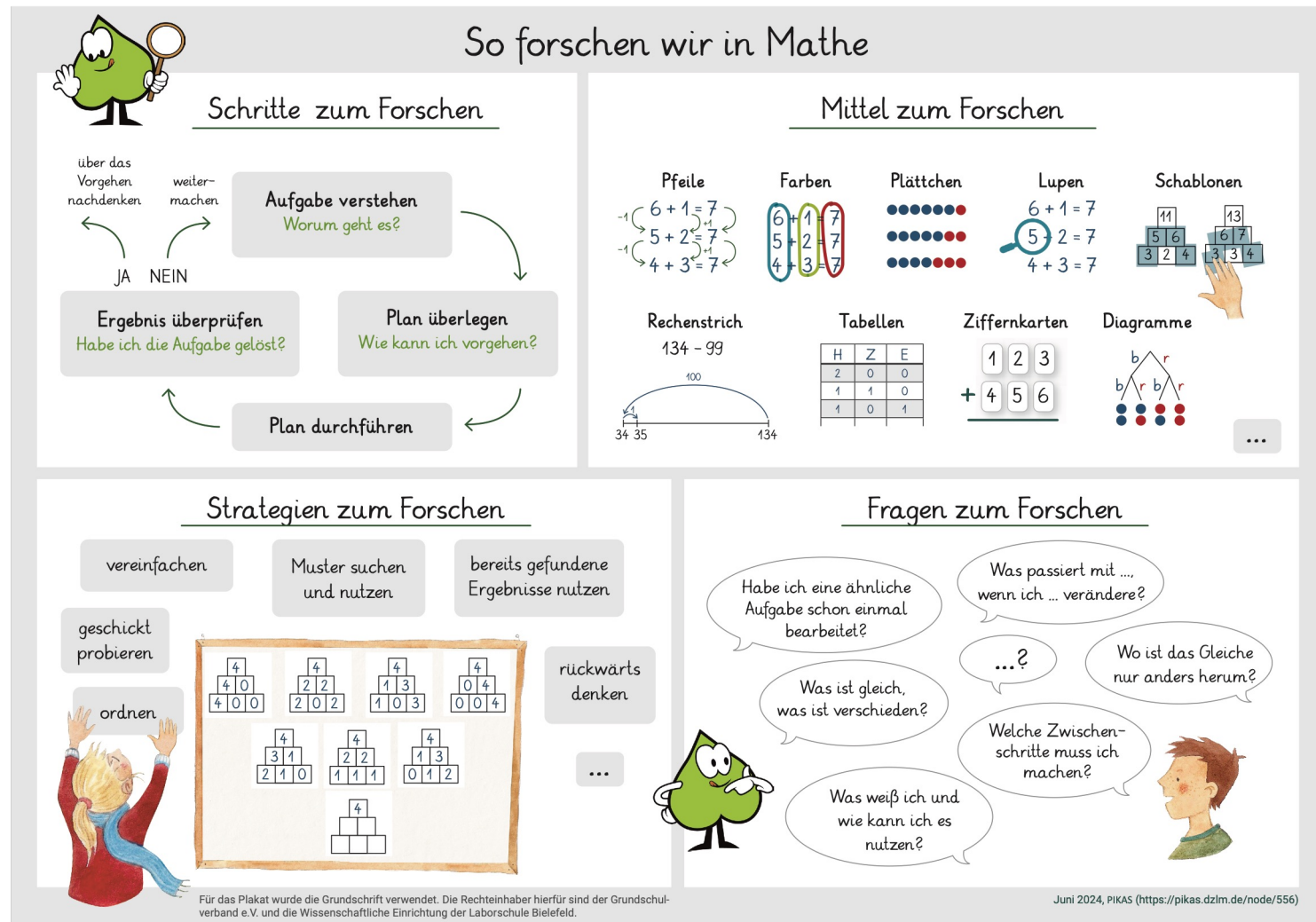
→ Der Rechte Winkel zwischen zwei senkrechten Linien wird durch einen Punkt gekennzeichnet.

Prediger et al., 2011

Wichtig: Die Zuordnung der kognitiven Aktivitäten ist nicht eindeutig, sondern hängt davon ab, welche kognitiven Aktivitäten man bei den Lernenden konkret voraussetzt.

Unterstützungsmöglichkeiten beim Entdecken, Beschreiben und Begründen

Neben kognitiv aktivierenden Aufgaben ist auch der Einbezug von Fragen, Strategien und Mitteln zum Forschen wichtig!





Aufgaben adaptieren

Mathe **inklusiv**
mit PIKAS
Deutsches Zentrum für
Lehrkräftebildung Mathematik

Leitideen >> Aufgaben adaptieren

Die Anforderungsbereiche berücksichtigen

Das Anforderungsniveau der Aufgabenstellung variiert auf Grundlage verschiedener Anforderungsbereiche, die innerhalb einer Aufgabe angesprochen werden.

$$2 \cdot 5 = 10 \quad 5 \cdot 2 = 10$$

mir fällt auf, dass es immer
die tausch aufgabe ist und das
Ergebnis ist immer gleich ist.

Forschermittel verwenden

Das Nutzen von Forschermitteln kann die Lernenden dabei unterstützen, mathematische Strukturen zu entdecken, Entdecktes darzustellen und zu begründen sowie über Dargestelltes zu kommunizieren.

$$\begin{array}{r} 9 \\ +2 \\ \hline 11 \\ +2 \\ \hline 13 \\ +2 \\ \hline 15 \\ +2 \\ \hline 17 \\ +2 \\ \hline 19 \\ +2 \\ \hline 21 \\ +2 \\ \hline 23 \end{array}$$

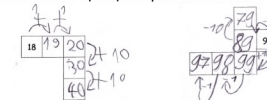
Tipps und Herausforderungen bereithalten

Die Bearbeitung der Aufgabenstellung wird durch unterschiedliche Formen der individuell angepassten Lernunterstützung erleichtert.



Verwandte Aufgabenstellungen verwenden

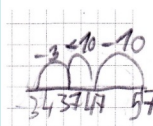
Die Aufgabenauswahl erfolgt von den Lernenden aus in der Regel zwei Aufgaben, mit gleicher oder ähnlicher Struktur, die sich in Anspruch und Komplexität zwar unterscheiden, aber im Sinne des Spiralprinzips aufeinander aufbauen.



AUFGABEN ADAPTIEREN

Verschiedene Vorgehensweisen ermöglichen

Durch die Verwendung von reichhaltigen Aufgaben, die auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten und Mustern beruhen, können die Lernenden unterschiedliche Vorgehensweisen zur Bearbeitung der Aufgabe selbst auswählen.



Unterschiedliche Darstellungsformen nutzen

Die Bearbeitung der Aufgabe wird durch die Bereitstellung unterschiedlicher Zugänge sowie die Nutzung und Vernetzung verschiedener Darstellungsformen erleichtert.



Offene Aufgaben einsetzen

Die Aufgabenauswahl wird innerhalb eines aufgespannten Rahmens durch die Lernenden selbst realisiert. Komplexität und Anspruchsniveau können sie demnach, ausgehend von ihren Lernmöglichkeiten, selbst bestimmen.



Nähere Informationen zur Leitidee „Aufgaben adaptieren“ und zu weiteren Leitideen inklusiven Unterrichts unter: pikas-mi.dzlm.de



Aufgaben adaptieren – Anforderungsbereiche berücksichtigen

Kognitive Anforderungen, lassen sich in drei Anforderungsbereiche gliedern:

Die Anforderungsbereiche berücksichtigen
Das Anforderungsniveau der Aufgabenstellung variiert auf Grundlage verschiedener Anforderungsbereiche, die innerhalb einer Aufgabe angesprochen werden.

mir fällt auf, dass es immer die Tauschaufgabe ist und das Ergebnis ist immer gleich ist.

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

1. Rechne aus.



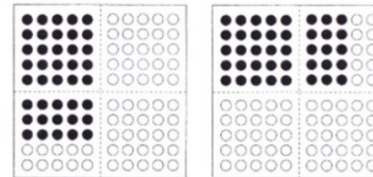
a) $1 \cdot 4 =$ $4 \cdot 1 =$ b) $2 \cdot 5 =$ $5 \cdot 2 =$

- Wiedergabe von Grundwissen
- Routinetätigkeiten

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

2. Was fällt dir auf? Markiere mit Forschermitteln.

$8 \cdot 5 = 40$ $5 \cdot 8 = 40$



mir fällt auf, dass es immer die Tauschaufgabe ist und das Ergebnis ist immer gleich ist.

- Vielfältige Lösungsmöglichkeiten

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

3. Warum ist das so? Begründe.

Weil die Aufgaben gedreht wurden, Sie wurden gedreht weil eine Sit aus wie eine Spalte die andere wie eine Zeile.

Wenn man die Punktefelder um dreht dann ist das Ergebnis gleich.

- Entwickeln und Reflexion von Strategien
- Beurteilen und Verallgemeinern



Aufgaben adaptieren – Tipps und Herausforderungen

Individuell angepasste Lernunterstützungen sowie Erweiterungen anbieten

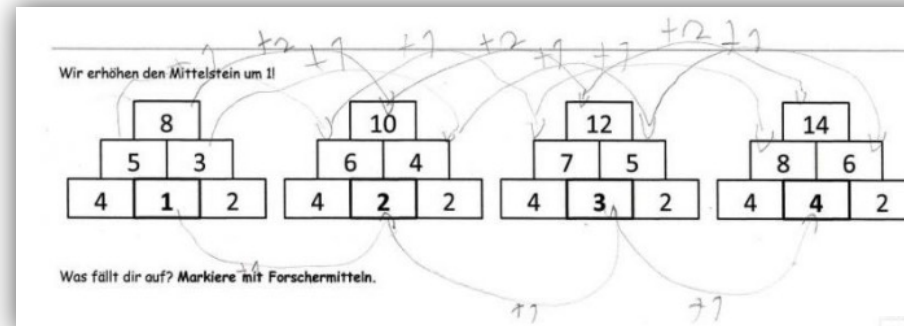
Unser Wortspeicher

Eine 3er- Mauer hat drei Reihen.

Diagramm einer 3er-Mauer (Pyramide) mit Beschriftungen:

- linker Eckstein
- Mittelstein
- rechter Eckstein
- Grundreihe/1. Reihe
- 2. Reihe
- Deckstein

Unterstützung durch Wortspeicher



Unterstützung durch gelöste Aufgaben

Was passiert mit dem Deckstein, wenn der Mittelstein um 1 größer wird?

Tippkarte 1

Unterstützung durch Tippkarten

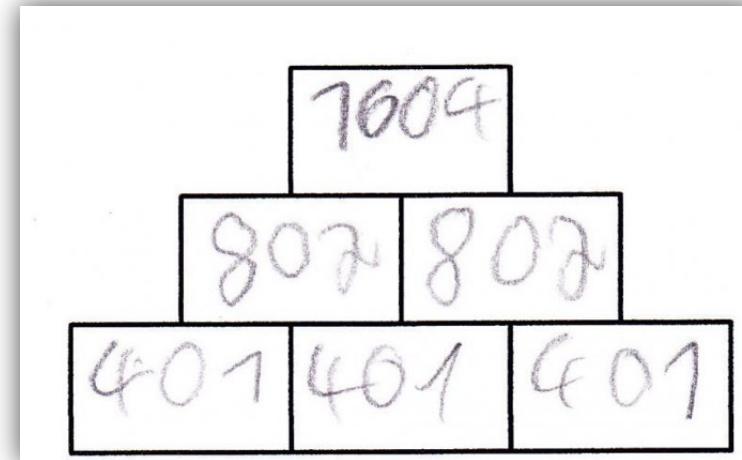


Aufgaben adaptieren – offene Aufgaben

Offene Aufgaben als Einstieg und Diagnosetool



Meine leichten Aufgaben:	Meine schwierigen Aufgaben:
$5 \cdot 1 = 5$ $4 \cdot 1 = 4$ $1 \cdot 2 = 2$ $1 \cdot 5 = 5$	$3 \cdot 6 = 18$ $3 \cdot 4 = 12$ $4 \cdot 4 = 16$ $6 \cdot 4 = 24$ $2 \cdot 2 = 4$



- Eigenproduktion anregen



Aufgaben adaptieren – Vorgehensweisen ermöglichen

Rechnen Sie doch einmal die Aufgabe $63 - ? = 37$ und notieren Sie anschließend, wie Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.

Eine Auswahl an Vorgehensweisen:

$37 + 3 = 40$ $40 + 20 = 60$ $60 + 3 = 63$ $3 + 20 + 3 = 26$	$63 - 30 = 33$ $33 - 7 = 26$	$63 - 6 = 57$ $57 - 20 = 37$ $20 + 6 = 26$
$63 - 40 = 23$ $23 + 3 = 26$	$37 + 20 = 57$ $57 + 6 = 63$ $20 + 6 = 26$	$63 - 30 = 33$ $33 + 4 = 37$ $30 - 4 = 26$

→ Jede und jeder rechnet anders!

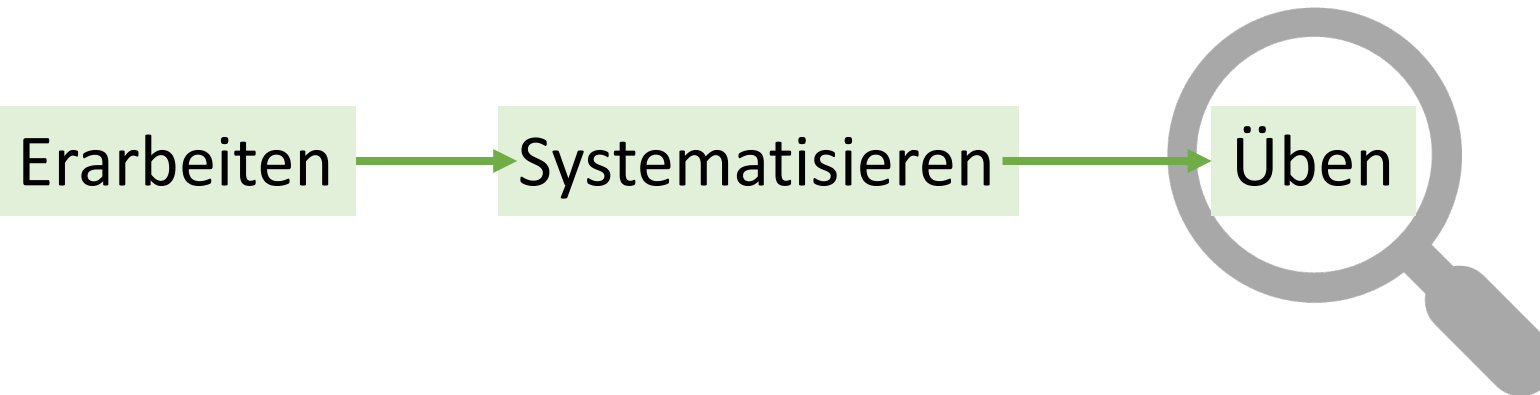
Kognitive Aktivierung in den Unterrichtsphasen...

Mit Aufgaben, Medien, Arbeitsmitteln und der Gesprächsführung wird das Lernen von Mathematik in allen Phasen angeregt und unterstützt, sodass Lernende ...

- in Erarbeitungsphasen: Konzepte in reichhaltigen Situationen nacherfinden, Zusammenhänge eigenaktiv entdecken und intuitive Vorgehensweisen zu Verfahren schematisieren (Entdeckendes Lernen)
- in Systematisierungsphasen: ihre entwickelten Ideen, ersten Konzepte und Verfahren aktiv und im Austausch mit anderen systematisieren und sichern, dabei werden sie zielorientiert durch die Lehrkraft unterstützt (Eigenaktives Ordnen)
- in Übungsphasen: das Gelernte beziehungsreich üben, es flexibel anwenden und ihr Wissen vernetzen (Produktives Üben).

Üben kognitiv aktivierend gestalten

Phasen des Unterrichts:



„Übung macht den Meister?“

Aufgabenpäckchen, in denen Fertigkeiten trainiert werden.

- 4 Multipliziere und führe zur Kontrolle eine Überschlagsrechnung durch.
- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $23 \cdot 29$ | b) $42 \cdot 17$ | c) $98 \cdot 67$ | d) $68 \cdot 87$ |
| e) $142 \cdot 12$ | f) $420 \cdot 170$ | g) $96 \cdot 957$ | h) $680 \cdot 870$ |
| i) $142 \cdot 1200$ | j) $948 \cdot 618$ | k) $960 \cdot 9570$ | l) $928 \cdot 468$ |
| m) $2301 \cdot 409$ | n) $2031 \cdot 409$ | o) $2031 \cdot 490$ | p) $8007 \cdot 130$ |

→ keine hohe kognitive Aktivierung bei den Lernenden!

„Übung macht den Meister“!

„Produktives Üben“ meint (substantielle) Aufgaben, in denen...

- mathematische Entdeckungen gemacht werden können,
- Vorstellungen gefestigt werden,
- mathematische Begriffe und Verfahren reflektiert werden

a) Berechne die folgenden Rechenaufgaben:

(1) $37 \cdot 3$

(2) $37 \cdot 6$

(3) $37 \cdot 9$

Was fällt dir auf? Warum ist das so?

b) Mit welchen Zahlen musst du 37 multiplizieren, um 444 oder 888 zu erhalten?

MW Rechentrainer, S. 59

Üben als Integraler Bestandteil eines aktiven Lernprozesses!

Produktives Üben ist...

- sinnstiftend,
- entdeckungsoffen,
- selbstdifferenzierend,
- reflexiv.

- 1) Rechne schriftlich, immer erst mal 8 und dann mal 125.
- 2) Welche Besonderheiten kannst du erkennen?
- 3) Begründe deine Beobachtung.
- 4) Erfinde eigene ähnliche Aufgabenpaare.

a) $35 \cdot 8 = \boxed{}$

$\boxed{} \cdot 125 =$

c) $113 \cdot 8 =$

$\boxed{} \cdot 125 =$

b) $97 \cdot 8 = \boxed{}$

$\boxed{} \cdot 125 =$

d) $406 \cdot 8 =$

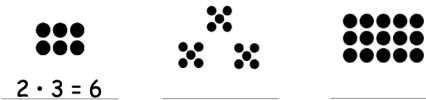
$\boxed{} \cdot 125 = \boxed{}$

Grundlegendes Üben

pikas-mi.dzlm.de/node/685

Zahl- und Operationsvorstellungen werden aufgebaut, indem Handlungen oder Bilder mit Unterstützung von geeigneten Materialien und sprachlichen Mitteln zu gedanklichen Vorstellungen umgewandelt werden.

Schreibe passende Mal-Aufgaben zu den Punkte-Bildern!



Vernetzendes Üben

pikas-mi.dzlm.de/node/690

Zahl- und Aufgabenbeziehungen werden entwickelt, indem am Material gestützte Grundvorstellungen systematisch erweitert werden. Das Ziel besteht darin, Zusammenhänge für das Lösen von Aufgaben nutzen zu können.

Nutze einfache Aufgaben, um schwierige Aufgaben zu lösen!



EFFEKTIV ÜBEN

<https://pikas-mi.dzlm.de/node/53>

Sicherndes Üben

pikas-mi.dzlm.de/node/695

Erst am Ende des Übungsprozesses trainieren die Lernenden bewusst das Automatisieren von Aufgabenergebnissen und die Geläufigkeit von Anwendungen oder Lösungsprozessen.

Trainiere mit der Blitzaufgabenkarte!



Entdeckendes Üben

pikas-mi.dzlm.de/node/700

Anhand von substanziellen Aufgabenformaten werden Einsichten zu den Zahl- und Aufgabenbeziehungen gefestigt, wobei der Fokus auf dem Entdecken, Beschreiben und Begründen übergeordneter Strukturen liegt.

Finde alle Mal-Aufgaben mit dem Ergebnis 12!

Zeichne passende Punktefelder! Warum kann es nicht noch mehr geben?



Kognitiv aktivierende Übungsaufgaben erzeugen

- Suche und Auswahl von guten Beispielen im genutzten Lehrwerk
- Adaption der angebotenen Aufgaben, z.B. durch Hinzufügen einer Reflexionsaufforderung

4. ~~Multipliziere und führe zur Kontrolle eine Überschlagsrechnung durch.~~

a) $23 \cdot 29$	b) $42 \cdot 17$	c) $98 \cdot 67$	d) $68 \cdot 87$
e) $142 \cdot 12$	f) $420 \cdot 170$	g) $96 \cdot 957$	h) $680 \cdot 870$
i) $142 \cdot 1200$	j) $948 \cdot 618$	k) $960 \cdot 9570$	l) $928 \cdot 468$
m) $2301 \cdot 409$	n) $2031 \cdot 409$	o) $2031 \cdot 490$	p) $8007 \cdot 130$

LS NRW G9, 2019, S. 112

**Bei welcher Aufgabe ist der Überschlag größer als das genaue Ergebnis?
Überlege zuerst, überprüfe dann.**

- 3- Schritt-Technik zum Erzeugen produktiver Übungsaufgaben durch gezieltes Anwenden von Variationstechniken.

Schritt 1 – Zielsetzung

Welches ist die Tätigkeit, die geübt werden soll?

- Wiedergeben von Wissen (**Zusammenhänge, Bezeichnungen, ...**) – Welche?
- Ausführen eines **Verfahrens** – Welches?
- Anwenden von **Begriffen**- Welche und auf welche Weise?
- Herstellen von **Beziehungen**- Welche?

Schritt 2 - Variieren der Aufgabe (1)

Aufgabentyp „Strukturen reflektieren“	Fragetyp	Frage	Beispiel
Muster erkennen und erzeugen in strukturierten Aufgabenserien	Muster suchen	Welche Muster kannst du entdecken?	1) Rechne schriftlich, immer erst mal 8 und dann mal 125. 2) Welche Besonderheiten kannst du erkennen. Begründe deine Beobachtung. a) $35 \cdot 8 = \square$ b) $97 \cdot 8 = \square$ $\square \cdot 125 =$ $\square \cdot 125 =$ c) $113 \cdot 8 =$ d) $406 \cdot 8 =$ $\square \cdot 125 =$ $\square \cdot 125 = \square$
	Muster fortsetzen	Wie lässt sich das Muster fortsetzen?	a) $325 \cdot 6$ b) $11 \cdot 11$ $325 \cdot 8$ $11 \cdot 12$ $325 \cdot 10$ $11 \cdot 13$ 1) Setze die Reihe fort und berechne. 2) Erfinde eigene, ähnliche Reihen und berechne diese.
	Analogisieren	Wie lauten ähnliche Aufgaben? Warum sind sie ähnlich?	1) Was haben die Aufgaben gemeinsam? Erkläre. 2) Bilde eigene weitere Aufgabenpaare. a) $202 \cdot 6$ b) $123 \cdot 4$ $202 \cdot 3$ $123 \cdot 8$ c) $333 \cdot 4$ d) $24 \cdot 16$ $666 \cdot 2$ $12 \cdot 8$

Schritt 2 - Variieren der Aufgabe (2)

Aufgabentyp „Strukturen reflektieren“	Fragetyp	Frage	Beispiel
Strukturieren von unstrukturierten Aufgabengruppen	Sortieren/ Klassifizieren	Bilde Gruppen... je nach Lösbarkeit/ Typ/...	Suche zunächst die Aufgaben heraus, die du im Kopf rechnen kannst. a) $53 \cdot 99$ b) $55 \cdot 96$ c) $49 \cdot 13$ d) $134 \cdot 65$ e) $77 \cdot 19$ f) $41 \cdot 22$
	Passung prüfen	Welches Beispiel passt nicht? Warum?	Welche Reihe passt nicht zu den anderen? Was bedeutet das für die Rechnungen in diesem Päckchen? a) $313 \cdot 4$ b) $600 \cdot 274$ $313 \cdot 400$ $6 \cdot 274$ $313 \cdot 40$ $60 \cdot 274$ c) $165 \cdot 3$ d) $412 \cdot 3$ $165 \cdot 23$ $412 \cdot 30$ $165 \cdot 20$ $4120 \cdot 3$
	Bewerten	Suche die schwierigsten/ leichtesten/ ungewöhnlichsten heraus.	1) Finde die Aufgaben, deren Produkt kleiner ist als 5000. Begründe. 2) Finde Aufgaben, die sich besonders leicht lösen lassen. Begründe. 3) Berechne die Aufgaben. a) $3007 \cdot 9$ b) $25 \cdot 4000$ c) $31 \cdot 42$ d) $88 \cdot 202$ e) $77 \cdot 199$ f) $41 \cdot 62$ g) $9 \cdot 348$ h) $530 \cdot 30$

Schritt 2 - Variieren der Aufgabe (3)

Aufgabentyp „Strukturen reflektieren“	Fragetyp	Frage	Beispiel
Argumentieren an gestellten/ gelösten Aufgaben.	Muster begründen	Wieso kommt dieses Muster heraus?	1) Multipliziere schriftlich und addiere dann die Produkte. 2) Was fällt dir auf? Begründe deine Entdeckung. 3) Erfinde eigene, ähnliche Aufgaben. a) $268 \cdot 3$ b) $268 \cdot 6$ $268 \cdot 7$ $268 \cdot 4$ c) $347 \cdot 8$ d) $347 \cdot 9$ $347 \cdot 2$ $347 \cdot 1$
	Darstellen	Wie kann man die Situation anders darstellen? (grafisch, rechnerisch, ...)	Berechne schriftlich und begründe dein Ergebnis mit dem Malkreuz. a) $162 \cdot 7$ b) $83 \cdot 24$
	Richtigkeit/ Gültigkeit	Welche Aufgabe ist unmöglich/ sinnvoll? Stimmt die Behauptung? Warum?	„Mal 3 und mal 100 ist das Gleiche wie mal 300“ – Stimmt das? Begründe oder widerlege.
	Fehler finden	Was ist hier falsch? Warum? Wie kann man es besser machen?	„36 mal 99 ist 3564, dann ist 36 mal 100 gleich 3565“ – Prüfe und begründe.

Schritt 2 - Variieren der Aufgabe (4)

Aufgabentyp „Probleme lösen“	Fragetyp	Frage	Beispiel
Operatives Durcharbeiten von Umkehraufgaben/ Aufgaben mit Parametern	Umkehrfrage	Wann kommt ... heraus?	- Gib ... an, deren... ist. - Gib zwei weitere Beispiel an. - Wie oft muss man die ..., damit ... ist.
	Optimierung	Wann ist ... am größten/kleinsten/ besten?	Du hast drei Reihen ... Bei welcher der drei ..., wenn man...? Warum?
	Funktionale Abhängigkeit	Was passiert, wenn...?	Was ändert sich ... der Zahlenreihe, wenn man a) alle Werte halbiert b) alle Werte um eins erhöht.
	Kombinatorische Ausschöpfung	Wie viele Möglichkeiten gibt es...? Wie lauten alle Möglichkeiten ...?	Wie viele verschiedene, wenn du...? a) Du darfst jede Zahl höchstens einmal nehmen. b) Was ist der größte und kleinste Wert, den du bekommst?

Schritt 3 – Prüfen und Optimieren

Regt die Aufgabe an, die Zieltätigkeit

- möglichst oft auszuführen? (**Effektivität**)
- auf verschiedenen Niveaus auszuführen? (**Differenzierung**)
- operativ durchzuarbeiten? (**Flexibilität**)
- beim Ausführen zu reflektieren? (**Verständnis**)

Beispiele

Beispiel 1: Muster der Zahlbeziehungen entdecken

Wie heißt der Partner?

Wie heißt deine Regel?
Immer +7

Steinweg, 2013, S. 212

Beispiel 2: Aufgabenfolgen erkunden

Schöne Päckchen. Setze fort. Was fällt dir auf? Beschreibe und erkläre.

- a) $\begin{array}{r} 700 \\ - 501 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 690 \\ - 502 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 680 \\ - 503 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 670 \\ - 504 \\ \hline \end{array}$
- b) $\begin{array}{r} 610 \\ - 401 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 619 \\ - 412 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 628 \\ - 423 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 637 \\ - 434 \\ \hline \end{array}$
- c) $\begin{array}{r} 801 \\ - 610 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 810 \\ - 619 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 819 \\ - 628 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 828 \\ - 637 \\ \hline \end{array}$
- d) $\begin{array}{r} 164 \\ - 87 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 275 \\ - 98 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 386 \\ - 109 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 497 \\ - 120 \\ \hline \end{array}$

Die 1. Zahl wird immer 10 kleiner und die 2. Zahl wird immer 1 größer. Also wird der Unterschied immer 11 kleiner.



Zahlenbuch 3, S.101

Weitere Beispiele aus der Sekundarstufe I

Beispiel 3:

Zusammenhänge entdecken

a) Rechne und setze die Päckchen fort, bis du das Ergebnis voraussagen kannst.

(1) $460,28 : 10$	(2) $460,28 : 10$	(3) $460,28 : 1$
$460,28 : 100$	$4602,8 : 10$	$46,028 : 0,1$
...	...	...

b) Bei welchem Päckchen bleibt das Ergebnis gleich.
Erkläre warum das so ist.

MW 6, S. 137

Beispiel 4:

Muster und Strukturen verallgemeinern und begründen

f) Schreibe Terme zu den folgenden Zahlenfolgen auf und berechne jeweils die Zahl an der 100. Stelle.

(1) 7, 11, 15, 19 ...	(2) 5, 10, 15, 20, ...	(3) 1, 4, 9, 16, ...
-----------------------	------------------------	----------------------

- g) ■ Warum lässt sich zur Folge (3) kein Term mit Startzahl und Änderung aufstellen?
■ Woran kann man bei Zahlenfolgen erkennen, ob man einen Term mit Startzahl und Änderung aufschreiben kann.

MW. 6, S. 199

Arbeitsauftrag

Wie können diese Übungsaufgaben so adaptiert werden, dass neben dem Trainieren der Berechnung weitere kognitive Aktivitäten angeregt werden?

Aufgabe 1

- (1) 25 000 g = ■ kg
- (2) 25 000 kg = ■ t
- (3) 12 000 m = ■ km
- (4) 12 km = ■ m
- (5) 12 cm = ■ mm

Aufgabe 2

- a) 2 t = ■ kg
 - 20 t = ■ kg
 - 200 t = ■ kg
 - 2000 t = ■ kg
 - b) 5 km = ■ m
 - 50 km = ■ m
 - 500 km = ■ m
 - 5000 km = ■ m
- 4444 t = ■ kg = ■ g
 - 444 t = ■ kg = ■ g
 - 44 t = ■ kg = ■ g
 - 4 t = ■ kg = ■ g
 - 3 700 000 cm = ■ m = ■ km
 - 370 000 cm = ■ m = ■ km
 - 37 000 cm = ■ m = ■ km
 - 3700 cm = ■ m = ■ km

Aufgabe 3

Berechne den Durchschnitt dieser Zahlen:

1) 1, 5, 9	2) 8, 10, 12, 14	3) 1, 6, 8, 9
2, 5, 8	16, 18, 20, 22	3, 8, 10, 11
3, 5, 7	24, 26, 28, 30	5, 10, 12, 13

Arbeitsaufträge – mögliche Ideen

Aufgabe 1

19 Gleich und nicht gleich

a) Rechne in deinem Heft in die angegebene Einheit um:

(1) $25\,000\text{ g} = \blacksquare\text{ kg}$

(2) $25\,000\text{ kg} = \blacksquare\text{ t}$

(3) $12\,000\text{ m} = \blacksquare\text{ km}$

(4) $12\text{ km} = \blacksquare\text{ m}$

(5) $12\text{ cm} = \blacksquare\text{ mm}$



Schon verrückt –
eigentlich bleibt's
gleich, obwohl
sich die Zahlen
verändern.

Erinnere dich
Zahlenwert **Einheit**
↓ ↓
 270 kg
└───┘
Größe

b) Was meinst du zu Merves Beobachtung?

c) Was passiert mit dem **Zahlenwert** beim Umrechnen?
Was passiert mit der **Einheit**? Was passiert mit der **Größe**?
Formuliere jeweils eine Merkregel mit einem eigenen Beispiel.

Arbeitsaufträge - Ideen

Aufgabe 2

20 Immer weniger, immer mehr

Rechne um.

Welches Muster erkennst du?

Setze jedes Päckchen um eine Aufgabe fort.

a) $2 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg}$
 $20 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg}$
 $200 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg}$
 $2000 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg}$

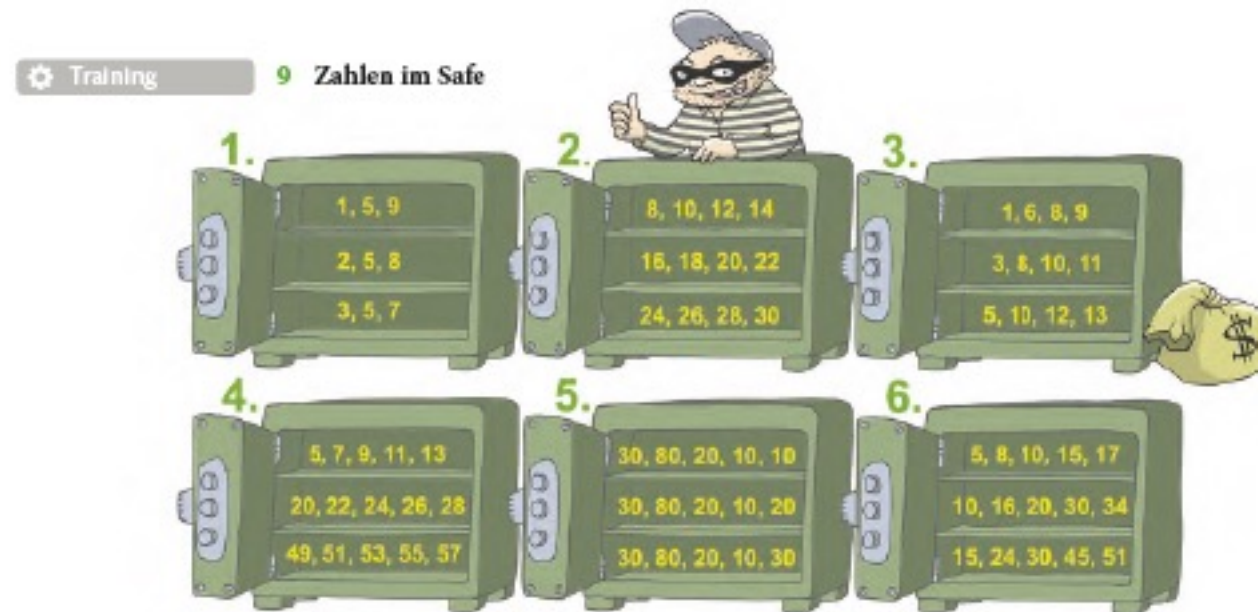
b) $5 \text{ km} = \blacksquare \text{ m}$
 $50 \text{ km} = \blacksquare \text{ m}$
 $500 \text{ km} = \blacksquare \text{ m}$
 $5000 \text{ km} = \blacksquare \text{ m}$

$\vdots$ $4444 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg} = \blacksquare \text{ g}$
 $\vdots$ $444 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg} = \blacksquare \text{ g}$
 $\vdots$ $44 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg} = \blacksquare \text{ g}$
 $\vdots$ $4 \text{ t} = \blacksquare \text{ kg} = \blacksquare \text{ g}$

$\vdots$ $3\,700\,000 \text{ cm} = \blacksquare \text{ m} = \blacksquare \text{ km}$
 $\vdots$ $370\,000 \text{ cm} = \blacksquare \text{ m} = \blacksquare \text{ km}$
 $\vdots$ $37\,000 \text{ cm} = \blacksquare \text{ m} = \blacksquare \text{ km}$
 $\vdots$ $3700 \text{ cm} = \blacksquare \text{ m} = \blacksquare \text{ km}$

Arbeitsaufträge - Ideen

Aufgabe 3



- Berechne jeweils den Durchschnitt der Zahlen in jedem Fach.
Schreibe auch auf, was dir bei jedem Fach auffällt.
- Erkläre alle deine Entdeckungen.
- Erfindet ähnliche Zahlensafes.
Tauscht sie untereinander und untersucht sie gegenseitig.

Kognitive Aktivitäten in der Übungsphase anregen:

- nicht nur oberflächliches Routine-Training ermöglichen
- Liste mit kognitiven Aktivitäten kann unterstützen, vorhandene Aufgaben zu analysieren und gezielt zu adaptieren
- Möglichkeiten, aus Standard Übungsaufgaben kognitiv anspruchsvollere Aufgaben zu machen (Leuders, 2009)
 - Muster erkennen und erzeugen
 - Strukturieren
 - Argumentieren
 - Operatives Durcharbeiten

Kognitive Aktivierung durch Gesprächsimpulse

- **Fehler nicht sofort kommentieren**
→ Lernende ihre Fehler selbst entdecken und korrigieren lassen.
- **Reflexion und Metakognitionen anregen**
→ Sowohl in einzelnen Aufgaben und Situationen als auch langfristig soll Nachdenken über das eigene Lernen und den eigenen Lernstand angeregt werden.
- **Vertiefende Gespräche unter Lernenden fördern**
→ Antworten werden nicht sofort bewertet, sondern alle Lernenden einbezogen und dazu eingeladen, begründet auf die Gedanken anderer einzugehen.
- **Zeit zum Nachdenken**
→ Vor dem Austausch: Lernenden Zeit zum Nachdenken geben, wenn eine Frage oder ein Problem gestellt wird.
- **Lernendenpräsentationen gezielt einbauen**
→ Präsentationen, um zielorientiertes Arbeiten unterstützen und das strukturierte, begründete Darbieten von Sachverhalten zu fördern.

Was wären mögliche
Impulse?

Kognitive Aktivierung durch Gesprächsimpulse

- **Fehler nicht sofort kommentieren**

→ Lernende ihre Fehler selbst entdecken und korrigieren lassen.

- **Reflexion und Metakognitionen anregen**

→ Sowohl in einzelnen Aufgaben und Situationen als auch langfristig soll Nachdenken über das eigene Lernen und den eigenen Lernstand angeregt werden.

- **Vertiefende Gespräche unter Lernenden fördern**

→ Antworten werden nicht sofort bewertet, sondern alle Lernenden einbezogen und dazu eingeladen, begründet auf die Gedanken anderer einzugehen.

- **Zeit zum Nachdenken**

→ Vor dem Austausch: Lernenden Zeit zum Nachdenken geben, wenn eine Frage oder ein Problem gestellt wird.

- **Lernendenpräsentationen gezielt einbauen**

→ Präsentationen, um zielorientiertes Arbeiten unterstützen und das strukturierte, begründete Darbieten von Sachverhalten zu fördern.

Schau dir noch einmal an...?

Was hast dir bei der Aufgabe geholfen?
Wo bist du dir noch unsicher?

Wer kann erklären warum die Lösung von ... gut zu ... passt?

Erst 2 Minuten still überlegen und notieren...

Jede Gruppe stellt ihre Ergebnisse vor.

Feedback zur Sitzung

Geben Sie uns Feedback zur Sitzung.

- Was haben Sie mitgenommen?
- Was hätten Sie sich noch gewünscht?
- Wünsche für die kommenden Sitzungen?
- ...



Vielen Dank für die Teilnahme und
viel Erfolg in der Praxis!

Barzel, B., & Ebers, P. (2020). Kognitiv aktivieren – eine wichtige Dimension fürs fachliche Lernen. *Friedrich+ Mathematik – Konzepte & Methoden*. <https://www.friedrich-verlag.de/friedrich-plus/sekundarstufe/mathematik/konzepte-methoden/kognitiv-aktivieren-7359>

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. (2012). *Mathewerkstatt 5*. Cornelsen, Berlin.

Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Fünf Prinzipien für qualitätsvollen Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, 242, 2–9. <https://www.friedrich-verlag.de/shop/mwdownloads/download/link/id/114555/>

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011): Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft* 39, S.213–230

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T., & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *mathematik lehren*, 164, 2–7. https://wwwold.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/11-ML_164-Basisartikel-Systematisieren.pdf

Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., Ehret, C., Glade, E., Gilbert, G., Holzäpfel, L., Marxer, M., Mühlenfeld, U., Rovar, T., Schink, A., Schmidt, U., Schneider, C., Storz, R., Streit, C., Verschraeger, J., Weber, C. & Witzmann, C. (2013). *Mathewerkstatt 6*. Berlin: Cornelsen.

Spiegel, H. & Selter, Ch. (2004). *Kinder & Mathematik: Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. (1992): Üben im Lernprozess. In: E. Ch. Wittmann/G. N. Müller (Hg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen*, Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, S. 175– 182. Stuttgart